どの面も等確率で出るサイコロがあり，最初このさいころには各面に 1 から 6 の数字が書かれている。このとき，次の操作 (*) を行う。

(*) 出た目を 3 で割った余りを r とするとき，出ている目の数字を r に書き換える。

(*) を繰り返し行い，n 回目に 0 が出る確率を p_n（$n=2, 3, \cdots$）とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) p_2 を求めよ。

(2) p_n を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

0 という面が現れるのは最大 2 面です。

つまり，0 が 1 面ある状態のサイコロを振るのか，0 が 2 面ある状態のサイコロを振るのかというシチュエーションが考えられるわけです。

n 回目にどの状態のサイコロなのかを考える必要が出てくるので，漸化式の導入を考え，状態推移を捉えながら立式する方針をおぼろげながらでも考えつきたいところです。

すると，構造的には

『実践演習：確率漸化式【ドロップアウト型〜じゃんけん〜】』

で扱ったじゃんけんの問題と同じ構造をしているとお分かりいただけるでしょう。

サイコロの中に 0 が書かれていない状態を A
サイコロの中に 0 が 1 つ書かれている状態を B
サイコロの中に 0 が 2 つ書かれている状態を C

とすると，

$$\mathrm{A}\to\mathrm{A}\to\mathrm{A}\to\cdots\cdots\to\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{B}\to\cdots\cdots\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{C}\to\cdots\cdots$$

と順々に状態が変化していく構造です。

※ 実践演習の記事をご覧になられていない方はぜひそちらもご確認ください。

【解答】

(1) 3 または 6 の目が 0 になり得る。その他の目は 0 となり得ない。

求める確率は 1 回目は 3 か 6 の目が出て，2 回目は書き換わった 0 が出るという確率なので，

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\cdots 答$$

(2)

サイコロの中に 0 が書かれていない状態を A
サイコロの中に 0 が 1 つ書かれている状態を B
サイコロの中に 0 が 2 つ書かれている状態を C

とする。

n 回の操作後に状態 A，B，C となっている確率をそれぞれ

a_n，b_n，c_n とおく。

0 回の操作後とは最初の状態であると解釈すれば，

$$a_0=1,\ b_0=0,\ c_0=0$$

と n の範囲を拡張できる。

$n+1$ 回目に状態 A とは

n 回目に状態 A
かつ
$n+1$ 回目の操作で 1，2，4，5 のいずれかの目が出る

$n+1$ 回目に状態 B とは

n 回目に状態 A
かつ
$n+1$ 回目の操作で 3，6 のいずれかの目が出る

または

n 回目に状態 B
かつ
$n+1$ 回目の操作で 1，2，4 (≡1)，5 (≡2)，0 のいずれかの目が出る

(mod 3)

$n+1$ 回目に状態 C とは

n 回目に状態 B
かつ
$n+1$ 回目の操作で 0 に書き換わっていない 3 の倍数の目が出る

または

n 回目に状態 C

よって

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n & \cdots ① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{5}{6}b_n & \cdots ② \\ c_{n+1}=\dfrac{1}{6}b_n+c_n & \cdots ③ \end{cases}$$

① より，$a_n=a_0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

②より，$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ で両辺 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{b_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}+\frac{1}{2}$$

$q_n=\frac{b_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ とおくと，$q_{n+1}=\frac{5}{4}q_n+\frac{1}{2}$，すなわち

$q_{n+1}+2=\frac{5}{4}(q_n+2)$ で，$q_n+2=(q_0+2)\left(\frac{5}{4}\right)^n$

$q_0=0$ なので，$q_n+2=2\left(\frac{5}{4}\right)^n$ で，$q_n=2\left(\frac{5}{4}\right)^n-2$

ゆえに，$\frac{b_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=2\left(\frac{5}{4}\right)^n-2$，すなわち

$$\begin{aligned}b_n&=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^n-2\right\}\\&=2\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

③ より，

$$\begin{aligned}c_{n+1}-c_n&=\frac{1}{6}b_n\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

$n\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}c_n&=c_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^k-\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\\&=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\ \text{（これは}n=0\text{ のときも成立する）}\end{aligned}$$

以上から，$n=0$，1，2，に対して，$\begin{cases}a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\\ b_n=2\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\\ c_n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{cases}$

n 回目に 0 が出る場合は，$n-1$ 回目に状態 B で確率 $\frac{1}{6}$ で 0 が出るか，$n-1$ 回目に状態 C で確率 $\frac{1}{3}$ で 0 が出るかがあり，$n=1$，2，3，… に対して

$$\begin{aligned}p_n&=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

確率の問題では方針決定のうまい下手によって，出来具合が大きく左右されるのは言うまでもありません。（まぁ確率に限った話ではないですが）

確率においての方針決定の際に考えることと言えば

「直接事象を考える or 余事象を考える」

「直接確率を求める or 漸化式を持ち出す」

という大枠があると思います。

今回は余事象を考えてみても「0が出ない確率」ですからあんまり余事象を考える旨味はなさそうです。

漸化式を持ち出すかどうかについては「限られたシチュエーションの中で推移していく」ということを考えると，漸化式の出番が目につきやすいかもしれません。

今回の作問については 3，6 の目が脱落していくという

”ドロップアウト型の構造”

を意識して作りました。

一気に２つがドロップアウトしない点がジャンケンと違いますが，ドロップアウト型の構造をもつ問題は漸化式で順々に求まっていくことを実感して下さい。