a，b を正の整数として，表裏が等確率で出るコインを A が a 枚，Bが b 枚もっている。A，B はそれぞれ手持ちのコインの中から 1 枚を投げ，裏が出たら相手にコインを渡す。この操作を繰り返し，手持ちのコインがなくなったら負けとなる。

A，B が勝つ確率をそれぞれ p_{A}，p_{B} とするとき，$p_{\mathrm{A}} : p_{\mathrm{B}} = a : b$ であることを示せ。

＜自作＞

【戦略】

”普通に”考えると埒があかないことに気がつくと思います。

このゲームにおいての勝ちとは「相手が破産する」ということになり，「破産の確率」と呼ばれるタイプの処理が必要になります。

例えば，A 君が勝ち，B 君が破産するまでのストーリーは無限にあり，パターンを全て書き出すのは不可能です。

本問が「破産の確率であるということをいち早く察して，破産の確率独特の漸化式の立式で仕留めます。

k 枚のコインを持っている状態からスタートして破産する確率を P_k と呼びます。

場には最大 $a+b$ 枚のコインがありますから $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a+b$ です。

このゲームにおいては，毎回毎回自分の手持ちのコインは

$$\begin{cases} 1\text{枚増える}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{4}\right) \\ \text{変化しない}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{2}\right) \\ 1\text{枚減る}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

のいずれかですから，k 枚の状態から破産する確率 P_k は

$$P_k = \frac{1}{4}P_{k+1} + \frac{1}{2}P_k + \frac{1}{4}P_{k-1}$$

という形で立式でき，漸化式を得ることになります。
（解答では番号を 1 つ上げて考えます。）

破産の確率では P_1 すら容易には出ません。

破産の確率で容易に出せるのは「端っこ」である P_0 と P_{a+b} のみです。

これをうまく利用して P_k を出します。

題意の p_a，p_b というのは $p_{\mathrm{A}}=P_b$，$p_{\mathrm{B}}=P_a$ であることから p_{A}，p_{B} が Get できます。

【解答】

このゲームにおいて，k 枚の状態からスタートし，手持ちのコインがなくなる確率を P_k とする。（ただし，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ a+b$ とする）

P_{k+1} について

$k+1$ 枚の状態からやがて手持ちのコインがなくなるのは，

$$\begin{cases} \text{自分が表，相手が裏 で}\ k+2\ \text{枚となり，やがてなくなる}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{4}\right) \\ \text{自分と相手の表裏が一致して}\ k+1\ \text{枚となり，やがてなくなる}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{2}\right) \\ \text{自分が裏，相手が表 で}\ k\ \text{枚となり，やがてなくなる}\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

という場合があり，$P_{k+1} = \dfrac{1}{4}P_{k+2} + \dfrac{1}{2}P_{k+1} + \dfrac{1}{4}P_k$

整理すると，$P_{k+2} = 2P_{k+1} - P_k$

これは，$P_{k+2} - P_{k+1} = P_{k+1} - P_k$ と変形できるので，

$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_{a+b}$ は等差数列であり，$P_k = sk + t$ と表せる。

$P_0 = 1$ なので，$t=1$ だから，$P_k = sk+1$

$P_{a+b} = 0$ なので，$0 = s(a+b)+1$ だから $s = -\dfrac{1}{a+b}$

これより，$P_k = -\dfrac{1}{a+b}k + 1$

よって

$$p_{\mathrm{A}} = P_b = -\frac{b}{a+b} + 1 = \frac{a}{a+b}$$

$$p_{\mathrm{B}} = P_a = -\frac{a}{a+b} + 1 = \frac{b}{a+b}$$

ゆえに，$p_{\mathrm{A}} : p_{\mathrm{B}} = \dfrac{a}{a+b} : \dfrac{b}{a+b} = a : b$ となり，題意は示された。

【総括】

破産の確率は経験がないとほぼ絶望的です。

逆に経験があると，ほぼ一本道であるため，個性が強い問題であり，出題されるとエグイ差がつきます。

本問は出来る限り破産の確率の「匂い」は消したつもりです。

破産の確率の経験があっても，

破産の確率だと見抜けなければ意味がありません

そういった意味で経験者にとっても難易度は高い問題かなと思います。