$x \geqq 1$ とするとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{[x^2]}{[x]^2}$$

で定める。ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数とする。

このとき，$f(x)$ の最大値を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

得体のしれない相手こそ実験です。

まず，$[x]$ を特定させるために，例えば $1 \leqq x < 2$ としてみます。

すると，$[x]=1$ なので，$[x]^2=1$ と，分母が特定します。

このとき，分子の x^2 がどのくらいの値なのかに興味がいくわけです。

すると，$1 \leqq x^2 < 4$ なので，$[x^2]$ ($=x^2$ の整数部分) としてあり得るのは $1,\ 2,\ 3$ です。

それぞれ，$1 \leqq x < \sqrt{2}$ ，$\sqrt{2} \leqq x < \sqrt{3}$，$\sqrt{3} \leqq x < 2$ のときになります。
当然分子が最大となるのは最後の区間 $\sqrt{3} \leqq x < 2$ のときになります。

次に $2 \leqq x < 3$ とすると，上と同様にまず分母 $[x]^2=2^2=4$ が特定します。

その中で，x^2 がどのくらいの値なのかというと，$4 \leqq x^2 < 9$ ですから，

$$[x^2]=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

となりますね。

これらの値はそれぞれ区間

$$2 \leqq x < \sqrt{5},\ \sqrt{5} \leqq x < \sqrt{6},\ \sqrt{6} \leqq x < \sqrt{7},\ \sqrt{7} \leqq x < \sqrt{8},\ \sqrt{8} \leqq x < 3$$

のときに起こります。

分子の最大はやはり最後の区間 $\sqrt{8} \leqq x < 3$ のときになります。

一般化してみると，

区間 $k \leqq x < k+1$ と 幅 1 の区間を考えて分母を特定して，

その後 x^2 がどのくらいの数なのかを調べます。

$k^2 \leqq x^2 < (k+1)^2\ (=k^2+2k+1)$ **なので，**

$$[x^2]=k^2,\ k^2+1,\ k^2+2,\ \cdots,\ k^2+2k$$

これらの値になるためにはそれぞれどの区間なのか，$k \leqq x < k+1$ という区間をさらに区切っていくわけです。

$[x^2]=k^2$ **となる区間は** $k \leqq x < \sqrt{k^2+1}$，

$[x^2]=k^2+1$ **となる区間は** $\sqrt{k^2+1} \leqq x < \sqrt{k^2+2}$ **，…**

といった具合です。

【解答】

$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

区間 $k \leqq x < k+1$ における $f(x)$ の最大値を M_k とする。

この区間において，$[x]=k$ であるから，$[x]^2=k^2$

$k \leqq x < k+1$ という区間をさらに区切り

$$[k,\ \sqrt{k^2+1}),\ [\sqrt{k^2+1},\ \sqrt{k^2+2}),\ \cdots\cdots,\ [\sqrt{k^2+2k},\ k+1)$$

という区間を考える。

$k \leqq x < \sqrt{k^2+1}$ では，$k^2 \leqq x^2 < k^2+1$ より，$[x^2]=k^2$

$$f(x)=1$$

$\sqrt{k^2+1} \leqq x < \sqrt{k^2+2}$ では，$k^2+1 \leqq x^2 < k^2+2$ より，$[x^2]=k^2+1$

$$f(x)=1+\frac{1}{k^2}$$

$$\vdots$$

$\sqrt{k^2+m} \leqq x < \sqrt{k^2+m+1}$ では，$k^2+m \leqq x^2 < k^2+m+1$ より，$[x^2]=k^2+m$ で

$$f(x)=1+\frac{m}{k^2}$$

$$\vdots$$

$\sqrt{k^2+2k} \leqq x < k+1$ では，$k^2+2k \leqq x^2 < (k+1)^2$ より，$[x^2]=k^2+2k$ で，

$$f(x)=1+\frac{2k}{k^2}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2k)$$

$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2k$ と動かしていく中で $f(x)=1+\dfrac{m}{k^2}$ は単調増加。

ゆえに $k \leqq x < k+1$における $f(x)$ の最大値 M_k は $M_k=1+\dfrac{2k}{k^2}$，

すなわち，$M_k=1+\dfrac{2}{k}$

次に k を $1,\ 2,\ \cdots$ と動かしたとき，$k=1$ のとき M_k は最大値 3 をとる。

ゆえに，$f(x)$ の最大値は 3 …答

【総括】

１：分母を固定させるために区切り

２：その区間の中で分子がどう振る舞うかさらに細かく区切る

３：その中で分子が最大となるときを捉える

という手順ですね。

ある１つの区間の中でのチャンピオンを決めて，その各区間のチャンピオンたちの中で一番大きいもの（グランドチャンピオン）を求めればいいわけです。

俗に言う「予選決勝法」ですね。（今一度【解答】のどの部分が予選で，どの部分が決勝なのかを考えてみてください）
予選決勝法の多くは独立多変数の最大・最小問題のアプローチとして使われ，東大でもよく出題される話題の１つです。