

仮想難関大【整数～3次関数と整数問題～】

a, b, c をいずれも 0 でない整数として、 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。

$f(x)$ を $f'(x)$ で割った余りが $-2x+1$ であるとき、次の間に答えよ。

- (1) $f(x)$ は極大値、極小値をもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を $f(\alpha)$ 、極小値を $f(\beta)$ とするとき、 $f(\alpha)f(\beta)$ が素数となる a, b, c の値を求めよ。
- (3) a, b, c の最大公約数は 1 であることを示せ。

< 自作 >

【戦略】

- (1) まずは与えられている条件を立式します。

実際に $f'(x)$ で割って余りを出し、それが $-2x+1$ であると繋いでいきます。

それにより、
$$\begin{cases} \frac{2(3b-a^2)}{9} = -2 \dots \textcircled{1} \\ \frac{9c-ab}{9} = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$
 という式を得ます。

$f'(x)=0$ の判別式 D について、 $\frac{D}{4}=a^2-3b>0$ が言えればよいのですが、それは $\textcircled{1}$ から $a^2-3b=9$ を得るので解決です。

- (2) $\textcircled{1}$ から、 $a^2=3(b+3)$ ですから、 a は 3 の倍数で、 $a=3k$ とおくことができます。

このとき、 $b=3k^2-3=3(k+1)(k-1)$ となり、さらに $\textcircled{2}$ から $c=k^3-k+1$ を得ます。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ と a, b, c という 3 パラメータあったのを

$$\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \text{ と全て } k \text{ を用いて表すことで、} \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$$

k という 1 パラメータで考えようというのが狙いです。

- (3) $\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$ というのが a, b, c の最大公約数に迫る

最大の武器です。

$k, k+1$ 及び $k, k-1$ は互いに素であることから a, b の共通素因数は 3 しかありません。

しかし、 $c=k(k+1)(k-1)+1$ は (連続 3 整数の積)+1 ですから 3 の倍数でないため、素因数 3 をもちません。

したがって、 a, b, c 全てを割り切る正の整数は 1 のみであることが言えます。

【解 1】

- (1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ を $f'(x)$ で実際に割ると

$$x^3+ax^2+bx+c=(3x^2+2ax+b)\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}\right)+\frac{2(3b-a^2)}{9}x+\frac{9c-ab}{9}$$

となり、条件から
$$\begin{cases} \frac{2(3b-a^2)}{9} = -2 \dots \textcircled{1} \\ \frac{9c-ab}{9} = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると、 $\frac{D}{4}=a^2-3b$

今、 $\textcircled{1}$ より $2(3b-a^2)=-18$ であり、 $a^2-3b=9$

ゆえに、 $\frac{D}{4}>0$ となり、 $f'(x)=0$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

その解を α, β ($\alpha<\beta$) とすると

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

となり、 $f(x)$ は極大値と極小値をもつ。

- (2) $\textcircled{1}$ を整理すると $a^2=3(b+3) \dots \textcircled{1}'$

a^2 が 3 の倍数となり、 a も 3 の倍数となる。

条件 $a \neq 0$ に注意すると $a=3k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) とおける。

このとき、 $\textcircled{1}'$ より、 $9k^2=3(b+3)$ で、これを整理すると

$$b=3(k+1)(k-1) \quad (b \neq 0 \text{ より } k \neq 1, k \neq -1)$$

これら a, b を $\textcircled{2}$ に代入し、 $\frac{9c-3k \cdot 3(k+1)(k-1)}{9}=1$

これを整理すると $c=k^3-k+1$ を得る。

以上から
$$\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \quad (k=\pm 2, \pm 3, \dots) \text{ と表せる。} \dots (*) \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$$

さて、このとき
$$f'(x)=3x^2+6kx+3(k+1)(k-1)=3\{x+(k+1)\}\{x+(k-1)\}$$

より、増減表は次のようになる。

x	...	$-k-1$...	$-k+1$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x = \alpha$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をもつので,

$$\alpha = -k - 1, \beta = -k + 1$$

$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{a}{9} \right) - 2x + 1$ 及び, α, β が $f'(x) = 0$ の解であることに注意すると

$$\begin{cases} f(\alpha) = -2\alpha + 1 \\ f(\beta) = -2\beta + 1 \end{cases}$$

$$\text{であり, } f(\alpha)f(\beta) = (-2\alpha + 1)(-2\beta + 1) \\ = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1$$

$$\alpha + \beta = -2k, \alpha\beta = k^2 - 1 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= 4(k^2 - 1) - 2 \cdot (-2k) + 1 \\ &= 4k^2 + 4k - 3 \\ &= (2k + 3)(2k - 1) \end{aligned}$$

$f(\alpha)f(\beta) = p$ (p :素数) すなわち $(2k + 3)(2k - 1) = p$ となるとき, $2k - 1 < 2k + 3$ に注意すると

$$\begin{cases} 2k - 1 = 1 \\ 2k + 3 = p \end{cases}, \text{ または } \begin{cases} 2k - 1 = -p \\ 2k + 3 = -1 \end{cases}$$

となるが, $k = \pm 2, \pm 3, \dots$ で, $k \neq 1$ であるため, $2k - 1 \neq 1$ であり, 前者は不適。

$$\text{ゆえに } \begin{cases} 2k - 1 = -p \\ 2k + 3 = -1 \end{cases} \text{ となり, } k = -2, p = 5 \text{ を得る。}$$

このとき, (*) から $(a, b, c) = (-6, 9, -5) \dots$ ㊦

$$(3) \text{ (*) より, } \begin{cases} a = 3k \\ b = 3(k+1)(k-1) \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots) \\ c = k^3 - k + 1 \end{cases}$$

k と $k+1$ は互いに素であり, k と $k-1$ も互いに素

ゆえに, a, b は 3 以外の共通素因数をもたない。

したがって, a, b をともに割り切る正の整数は 1 または 3

$$\text{一方, } c = k(k+1)(k-1) + 1$$

$k-1, k, k+1$ は連続 3 整数より,

$$k(k+1)(k-1) = 6m \quad (k \neq 0, k \neq \pm 1 \text{ なので } m \text{ は } m \neq 0 \text{ の整数)}$$

と表せる。

よって, $c = 6m + 1 (= 3 \cdot 2m + 1)$ で c は 3 で割り切れない。

以上から a, b, c を全て割り切る正の整数は 1 のみであり, a, b, c の最大公約数は 1 である。

【戦略 2】(2) について ~方針のみ~

$f'(x) = 0$ の解が α, β ですから実際に解きにいきます。

(1) の途中経過から $\frac{D}{4} = 9$ を得ますから, 解の公式を用いてもキレイに解くことができるという見通しが立ち, 実際に解くと $x = \frac{-a \pm 3}{3}$ が得られます。

α の方で極大, β の方で極小ですから, $\alpha < \beta$ であることを考えると $\alpha = \frac{-a-3}{3}, \beta = \frac{-a+3}{3}$ となります。

$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{a}{9} \right) - 2x + 1$ ですから, $\begin{cases} f(\alpha) = -2\alpha + 1 \\ f(\beta) = -2\beta + 1 \end{cases}$ として計算すると

$$f(\alpha) = -2 \cdot \frac{-a-3}{3} + 1 = \frac{2a+9}{3}, f(\beta) = -2 \cdot \frac{-a+3}{3} + 1 = \frac{2a-3}{3}$$

なのですが, $f(\alpha)f(\beta) = (\text{素数})$ という条件から

$$\frac{(2a-3)(2a+9)}{9} = (\text{素数}) \text{ ということになり,}$$

$$(2a-3)(2a+9) = 9p \quad (p \text{ は素数})$$

を得るため, 約数を拾い上げ, $0 < 2a-3 < 2a+9$ のときは

$$(2a-3, 2a+9) = (1, 9p), (3, 3p), (9, p), (p, 9) \text{ が考えられます。}$$

一方で, $2a-3 < 2a+9 < 0$ のときは

$$(2a-3, 2a+9) = (-9p, -1), (-3p, -3), (-9, -p), (-p, -9)$$

が考えられます。

しらみつぶしに調べると, $(a, p) = (3, 5), (-6, 5)$ を得ます。

あとは ①, ② から芋づる式に b, c が求まります。

$(a, p) = (3, 5)$ のときは $b = 0$ になってしまうので不適となります。

【総括】

実際に割り算して、余りを比較することで、 a, b, c が満たすべき条件を導出し、そこから言えることを丹念に調べ上げていく”特効薬のない問題”です。

目につきやすいのは【戦略2】の方針かもしれませんが、(3)をどこから切り崩せばよいのかが見えにくくなり、立ち往生してしまう可能性が高くなるでしょう。

あと【解1】では最初から
$$\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$$
 を得ておけば、(2)の途中

経過で(1)の結論が得られますから、判別式を持ち出す必要は実はありませんでした。

ただ、それは結果的に分かることであり、現実的なことを考えて解答を作っています。

実際恐らく一番無駄のない解答は次のような流れの解答でしょう。

【一番無駄のない(と思われる)解答】

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ を $f'(x)$ で実際に割ると

$$x^3+ax^2+bx+c=(3x^2+2ax+b)\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}\right)+\frac{2(3b-a^2)}{9}x+\frac{9c-ab}{9}$$

となり、条件から
$$\begin{cases} \frac{2(3b-a^2)}{9}=-2 \dots \textcircled{1} \\ \frac{9c-ab}{9}=1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を整理すると $a^2=3(b+3) \dots \textcircled{1}'$

a^2 が3の倍数となり、 a も3の倍数となる。

条件 $a \neq 0$ に注意すると $a=3k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) とおける。

このとき、①'より、 $9k^2=3(b+3)$ で、これを整理すると

$$b=3(k+1)(k-1) \quad (b \neq 0 \text{ より } k \neq 1, k \neq -1)$$

これら a, b を ② に代入し、 $\frac{9c-3k \cdot 3(k+1)(k-1)}{9}=1$

これを整理すると $c=k^3-k+1$ を得る。

以上から
$$\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \quad (k=\pm 2, \pm 3, \dots) \text{と表せる。} \dots (*) \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$$

さて、このとき
$$f'(x)=3x^2+6kx+3(k+1)(k-1)=3\{x+(k+1)\}\{x+(k-1)\}$$

より、増減表は次のようになる。

x	...	$-k-1$...	$-k+1$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

これより、 $f(x)$ は極大値と極小値をもつ。

(2) $x=\alpha$ で極大値、 $x=\beta$ で極小値をもつので、

$$\alpha=-k-1, \beta=-k+1$$

$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x+\frac{a}{9}\right)-2x+1$ 及び、 α, β が $f'(x)=0$ の解であることに注意すると

$$\begin{cases} f(\alpha)=-2\alpha+1 \\ f(\beta)=-2\beta+1 \end{cases}$$

であり、 $f(\alpha)f(\beta)=(-2\alpha+1)(-2\beta+1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$\alpha+\beta=-2k, \alpha\beta=k^2-1$ より、

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= 4(k^2-1)-2 \cdot (-2k)+1 \\ &= 4k^2+4k-3 \\ &= (2k+3)(2k-1) \end{aligned}$$

$f(\alpha)f(\beta)=p$ (p :素数) すなわち $(2k+3)(2k-1)=p$ となるとき、 $2k-1 < 2k+3$ に注意すると

$$\begin{cases} 2k-1=1 \\ 2k+3=p \end{cases}, \text{ または } \begin{cases} 2k-1=-p \\ 2k+3=-1 \end{cases}$$

となるが、 $k=\pm 2, \pm 3, \dots$ で、 $k \neq 1$ であるため、 $2k-1 \neq 1$ であり、前者は不適。

ゆえに $\begin{cases} 2k-1=-p \\ 2k+3=-1 \end{cases}$ となり、 $k=-2, p=5$ を得る。

このとき、(*)から $(a, b, c)=(-6, 9, -5) \dots \textcircled{\square}$

(3) (*)より、
$$\begin{cases} a=3k \\ b=3(k+1)(k-1) \quad (k=\pm 2, \pm 3, \dots) \\ c=k^3-k+1 \end{cases}$$

k と $k+1$ は互いに素であり、 k と $k-1$ も互いに素

ゆえに、 a, b は3以外の共通素因数をもたない。

したがって、 a, b をともに割り切る正の整数は1または3

一方、 $c=k(k+1)(k-1)+1$

$k-1, k, k+1$ は連続3整数より、

$k(k+1)(k-1)=6m$ ($k \neq 0, k \neq \pm 1$ なので m は $m \neq 0$ の整数)

と表せる。

よって、 $c=6m+1(=3 \cdot 2m+1)$ で c は3で割り切れない。

以上から a, b, c を全て割り切る正の整数は1のみであり、 a, b, c の最大公約数は1である。