${}_{4n}\mathrm{C}_{2n}$ が 4 で割り切れないような 2021 以下の自然数 n は何個あるか。

<自作>

【戦略】

$n=1$ のとき ${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$

$n=2$ のとき ${}_8\mathrm{C}_4=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=70$

このあたりから直接計算したくないという気持ちが出てくるため，4 の倍数かどうかだけを見ようという気持ちが芽生えてくるでしょう。

$n=3$ のとき ${}_{12}\mathrm{C}_6=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{2^6\cdot(\text{奇数})}{2^4\cdot(\text{奇数})}=(4\text{ の倍数})$

こうしてみると，${}_{4n}\mathrm{C}_{2n}$ を書き下したときの，分母と分子の素因数 2 の個数が問題となってきそうです。

分子側に素因数 2 が 2 個以上残ったら 4 の倍数だと言えます。

最終的にそういったことを目論んで書き下してみると

$$ {}_{4n}\mathrm{C}_{2n}=\frac{2^n(2n+1)(2n+3)+\cdots+\{2n+(2n-1)\}}{n\,!} $$

となりますから，結局は 2^n と $n\,!$ の素因数 2 の個数が決め手になってきます。（詳しい計算については【解答】の中で）

$$ (2^n\text{ の素因数 2 の個数})=n $$

$$ (n\,!\text{ の素因数 2 の個数})=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\cdots\cdots $$

となります。（$[x]$ **は x を超えない最大の整数**）

そこで，$f(n)=n-\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{2^2}\right]+\cdots\cdots\right)$ と設定し，$f(n)=0$，1 となる n について考えればよいということになります。

ただ，$f(n)=0$ となることは直感的にはなさそうなので，

①：$f(n)\geqq 1$

②：$f(n)=1$ となるような n の存在を言う

③：$f(n)=1$ となるような n が ② で考えたものに限ることを示す。

という 3 点を示しに行きます。

一般に実数 x に対して $[x]\leqq x$ であることを利用しながら $f(n)$ を評価していきます。

② については $f(n)$ を小さくしようと思うと，ガウス記号がそのまま外れる場合が考えられますから，$n=2^m$ という形のときだと予想できます。

実際，$f(2^m)$ を計算してみると 1 となります。

厄介なのが ③ の証明で，色々試行錯誤することになると思いますが，$n\neq 2^m$ ということを，$n=2^m+r$ $(r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^m-1)$ と見て $f(n)$ を評価すると何とか $f(n)>1$ が得られます。

【解答】

$$ \begin{aligned} {}_{4n}\mathrm{C}_{2n}&=\frac{(4n)!}{(2n)!(4n-2n)!}\\ &=\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}\\ &=\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots(2n+2n)}{(2n)!\,(2n)!}\\ &=\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots\{2n+(2n-1)\}+(2n+2n)}{(2n)!}\\ &=\frac{2^n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)(2n+1)(2n+3)+\cdots+\{2n+(2n-1)\}}{(2n)!}\\ &=\frac{2^n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)(2n+1)(2n+3)+\cdots+\{2n+(2n-1)\}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\\ &=\frac{2^n(2n+1)(2n+3)+\cdots+\{2n+(2n-1)\}}{n\,!} \end{aligned} $$

ここで

$$ (2^n\text{ の素因数 2 の個数})=n $$

$$ (n\,!\text{ の素因数 2 の個数})=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\cdots\cdots $$

（ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数）

$f(n)=n-\left(\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{2^2}\right]+\cdots\cdots\right)$ とおく。

$\left[\dfrac{n}{2}\right]\leqq\dfrac{n}{2}$，$\left[\dfrac{n}{2^2}\right]\leqq\dfrac{n}{2^2}$，…… なので

等号はいつか成り立たなくなります

$$ \begin{aligned} f(n)&>n-\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots\cdots\right)\\ &=n-\frac{\frac{n}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\ &=0 \end{aligned} $$

$f(n)$ は整数であることを考えると，$f(n)\geqq 1$

また，

$$ \begin{aligned} f(2^m)&=2^m-\left\{\left[\frac{2^m}{2}\right]+\left[\frac{2^m}{2^2}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{2^m}{2^m}\right]+\left[\frac{2^m}{2^{m+1}}\right]+\cdots\cdots\right\}\\ &=2^m-(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+1)\\ &=2^m-\frac{2^m-1}{2-1}\\ &=1 \end{aligned} $$

$n=2^m+r$（m は 0 以上の整数，$r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^m-1$）のとき

$f(2^m+r)$

ここから分母の方が大きくなり，$[0.***\cdots]$ です。

$$=(2^m+r)-\left\{\left[\frac{2^m+r}{2}\right]+\left[\frac{2^m+r}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2^m+r}{2^m}\right]+\left[\frac{2^m+r}{2^{m+1}}\right]+\cdots\cdots\right\}$$

$$=2^m+r-\left\{\left[\frac{2^m+r}{2}\right]+\left[\frac{2^m+r}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2^m+r}{2^m}\right]\right\}$$

$$\geqq 2^m+r-\left\{\frac{2^m+r}{2}+\frac{2^m+r}{2^2}+\cdots+\frac{2^m+r}{2^m}\right\}$$

$$=2^m+r-\left(2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+1+\frac{r}{2}+\frac{r}{2^2}+\cdots+\frac{r}{2^m}\right)$$

$$=2^m+r-\frac{2^m-1}{2-1}-\frac{\frac{r}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{r}{2^m}$$

$$>1$$

となり，$n=2^m+r$（$r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^m-1$）に対して，$f(n)>1$

以上から，$n=2^m$（$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）のときに限り，$f(n)$ は最小値 1 をとる。

このことから，$n=2^m$ のときに限り，

2^n の素因数 2 の個数と，n！の素因数 2 の個数の差が 1 となる。

したがって，${}_{4n}\mathrm{C}_{2n}$ が 4 で割り切れないような 2021 以下の自然数 n は

$n=2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots\cdots,\ 2^{10}$ の 11 個 …答

【総括】

実験したり，ある程度手を動かすことで ${}_{4n}\mathrm{C}_{2n}$ を書き下し，2^n と n！の素因数 2 の個数に注目する部分までは何とか辿り着きたいところです。

そこからが試行錯誤の連続です。

$f(n)$ を小さくしようとして，ガウス記号がそのまま外れるときを考えて $n=2^m$ に辿り着くことはそこまで難しくはないと思いますが，問題は

$f(n)$ が最小値 1 をとるのは，$n=2^m$ のときに限る

という部分の証明をどうするかでしょう。

n が

2^1 と 2^2 の間のとき
2^2 と 2^3 の間のとき
2^3 と 2^4 の間のとき
⋮
2^m と 2^{m+1} の間のとき

と考えて $n=2^m+r$（$r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^m-1$）と設定する部分は試行錯誤が必要だと思います。

また，最初の実験を少し粘ってみますと，$n=2^m$ の形のときに 4 で割り切れないことが予想できるかもしれません。

予想がたてば，帰納法という路線も考えられると言えば考えられます。

ただ

①：二項係数に関する帰納法であり，前段仮定との結びつきでエネルギーを使いそう
②：仮に数学的帰納法で証明できたとしても，$n=2^m$ の形以外のもので題意を満たすものがあるかどうかは別問題

ということで帰納法に走りたくはありません。特に ② の理由は致命的でしょう。