　O を原点とする座標空間において，A(0，0，1) とする。
点 P が xy 平面上の放物線 $y=x^2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を動くとき，線分 AP が通過してできる曲面を S とする。
　曲面 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K としたとき，K の体積 V を求めよ。

＜自作＞

【戦略】

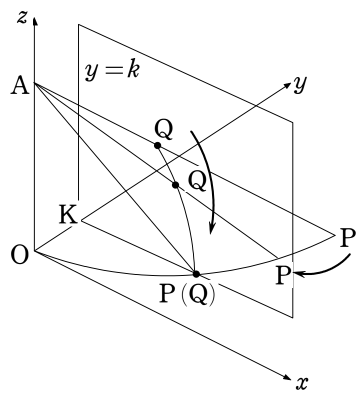
空間座標における回転体なので，

$$\begin{cases}\text{全体像を捨てよ}\\ \text{切ってから回す}\\ \text{回転の中心からの最大距離最小距離をとらえる}\end{cases}$$

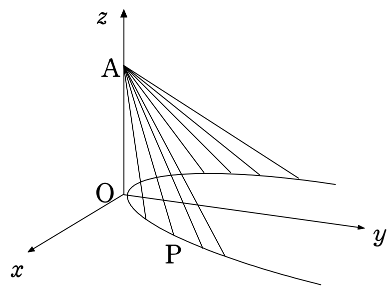
というセオリーに従い処理します。

まず，題意の立体を切ることになりますが，回す前の曲面 S について調べます。

線分 AP を固定したときの $y=k$ による切り口（点 Q）を捉えて，P の固定を外して動かせば，点 Q の軌跡が 題意の立体の $y=k$ による切り口となります。



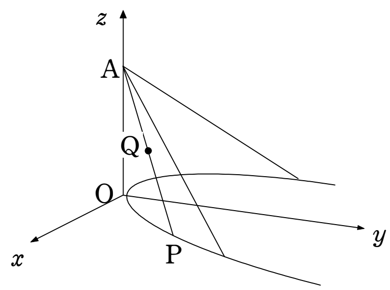
【解答】



曲面 S を $y=k$ $(0<k<1)$ で 切った切り口の図形を求める。

線分 AP と $y=k$ との交点を Q(X, k, Z) とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\0\end{pmatrix}$ とすると，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=(1-u)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-u)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}t\\t^2\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}ut\\ut^2\\1-u\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Q の y 座標は k なので，$ut^2=k$， $0<k<1$ なので，$t\neq 0$ で，$u=\dfrac{k}{t^2}$

これより，Q$\left(\dfrac{k}{t}, k, 1-\dfrac{k}{t^2}\right)$ となる。

よって，平面 $y=k\ (0<k<1)$ 上で，点 Q の軌跡が表す曲線は

$$\begin{cases}x=\dfrac{k}{t}\\ z=1-\dfrac{k}{t^2}\end{cases}$$

とパラメータ表示される。

対称性から，$x>0$ の範囲で考える。

Q の z 座標は $0\leqq z\leqq 1$ を満たすので，$0\leqq 1-\dfrac{k}{t^2}\leqq 1$，すなわち

$$0\leqq t^2-k\leqq t^2$$

これを整理すると，$t\geqq\sqrt{k}$ を得て，さらに，$t\leqq 1$ も考えると，

$$\sqrt{k}\leqq t\leqq 1$$

$t=\dfrac{k}{x}$ より，$z=1-\dfrac{k}{\dfrac{k^2}{x^2}}$，すなわち $z=1-\dfrac{1}{k}x^2$

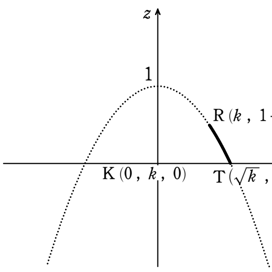
また，$\sqrt{k}\leqq t\leqq 1$ より，$\sqrt{k}\leqq\dfrac{k}{x}\leqq 1$ であるから，$k\leqq x\leqq\sqrt{k}$

よって，

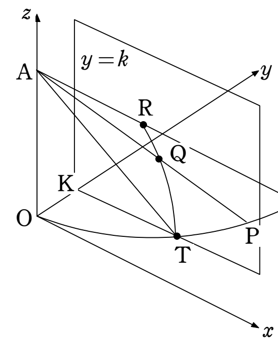
曲面 S を $y=k$ で切った切り口（点 P が xy 平面上の放物線 $y=x^2$ の $0<x\leqq 1$ を満たす部分を動いたときの平面 $y=k$ 上での点 Q の軌跡）は

$$\text{放物線 } z=1-\frac{1}{k}x^2 \text{ の } k\leqq x\leqq\sqrt{k} \text{ を満たす部分}$$

である。（図 1，図 2 参照）



（図 1）



（図 2）

$z=1-\dfrac{1}{k}x^2$ 上の $k\leqq x\leqq\sqrt{k}$ における点 U $\left(u,\ 1-\dfrac{1}{k}u^2\right)$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{KU}^2&=u^2+\left(1-\frac{1}{k}u^2\right)^2\\&=\frac{1}{k^2}u^4+\frac{k-2}{k}u^2+1\\&=\frac{1}{k^2}\left(u^2-\frac{k(2-k)}{2}\right)^2-\frac{k^2-4k}{4}\end{aligned}$$

最大距離と最小距離を求めに行きます。

$k\leqq u\leqq\sqrt{k}$ であるから，$k^2\leqq u^2\leqq k$

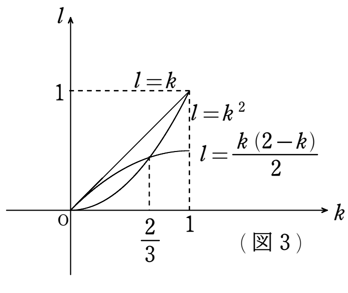
さらに，$0<k<1$ において，

(**左端**)≦(**軸**)<(**右端**)

$$\begin{cases}0<k\leqq\dfrac{2}{3} \text{ のとき，} k^2\leqq\dfrac{k(2-k)}{2}<k\\[2ex]\dfrac{2}{3}\leqq k<1 \text{ のとき } \dfrac{k(2-k)}{2}\leqq k^2<k\end{cases}$$

(**軸**)≦(**左端**)<(**右端**)

であることに注意する。（図 3 参照）

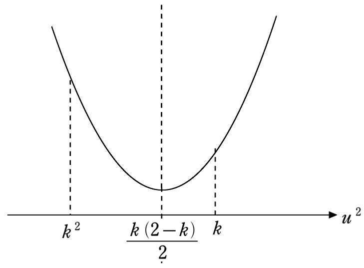


（図 3）

以下，題意の立体を $y=k$ $(0<k<1)$ で切った切り口の断面積を $S(k)$ とする。

(i)　$0<k\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき

(i−1)　$\dfrac{k(2-k)}{2}\geqq\dfrac{k^2+k}{2}$，すなわち $0<k\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$u^2=\dfrac{k(2-k)}{2}$ のとき，KU^2 は最小値 $-\dfrac{k^2-4k}{4}$

$u^2=k^2$ のとき，KU^2 は最大値 $k^2+(1-k)^2$

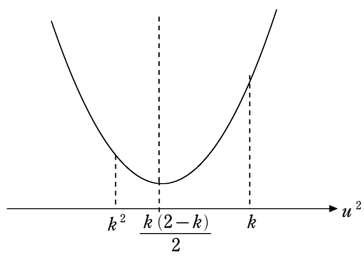
$$\begin{aligned}S(k)&=\pi\{k^2+(1-k)^2\}-\pi\left(-\frac{k^2-4k}{4}\right)\\&=\pi\left(\frac{9}{4}k^2-3k+1\right)\end{aligned}$$

$k=0$ のときの切り口は線分 OA となり，この線分 OA の y 軸回転体の面積が $S(0)$ なので，$S(0)=\pi$

よって，この式は $k=0$ のときも成立し，$0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ で

$$S(k)=\pi\left(\frac{9}{4}k^2-3k+1\right)$$

(i−2)　$\dfrac{k(2-k)}{2}\leqq\dfrac{k^2+k}{2}$，すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき

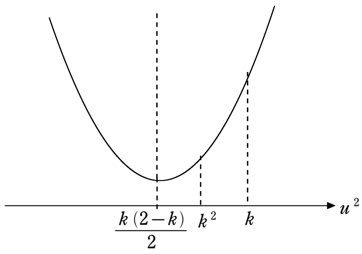


$u^2=\dfrac{k(2-k)}{2}$ のとき，KU^2 は最小値 $-\dfrac{k^2-4k}{4}$

$u^2=k$ のとき，KU^2 は最大値 k

$$\begin{aligned}S(k)&=\pi k-\pi\left(-\frac{k^2-4k}{4}\right)\\&=\frac{\pi}{4}k^2\end{aligned}$$

(ii)　$\dfrac{2}{3} \leqq k < 1$ のとき



$u^2 = k^2$ のとき，KU^2 は最小値 $k^2 + (1-k)^2$

$u^2 = k$ のとき，KU^2 は最大値　k

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi k - \pi\{k^2 + (1-k)^2\} \\ &= \pi(-2k^2 + 3k - 1) \end{aligned}$$

一方，$k=1$ のときの切り口は 2 点 $(1,1,0)$，$(-1,1,0)$ なので，
$S(1) = 0$

これより，この式は $k=1$のときも成立し，$\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq 1$ で，

$$S(k) = \pi(-2k^2 + 3k - 1)$$

よって，求める体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi\left(\frac{9}{4}k^2 - 3k + 1\right) dk + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{4}k^2\, dk + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \pi(-2k^2 + 3k - 1)\, dk \\ &= \pi\left[\frac{3}{4}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + k\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}k^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} - \pi\left[\frac{2}{3}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + k\right]_{\frac{2}{3}}^{1} \\ &= \frac{7}{32}\pi + \frac{37}{2592}\pi + \frac{275}{162}\pi \\ &= \frac{139}{72}\pi \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

曲面 S の切り口をとらえにいくためには，空間ベクトルの扱いに長けている必要があります。

ベクトルを繋いでパラメータ表示する

ということは至るところで利用します。

(図 1)，(図 2) のイメージが Get できれば，精神的負担は減るでしょう。

その後は回転の中心からの最大距離と最小距離を考えることになります。

結局は 2 次関数の最大最小に帰着するのですが，文字の範囲に気を付けたり，軸の位置による場合分けもあり，手際よく処理しないと結構負担のかかる処理となります。

誘導がつくかどうかについては，大学の色が出ると思いますが，基本的には誘導を期待せずに「やるべきことがきちんと整理できている」という状態まで仕上げておきたいところです。