整数を係数とする 3 次方程式

$$x^3+ax^2+bx+1=0$$

が整数解と虚数解をもつとき，a，b の値の組を全て求めよ。

＜ '19 東京学芸大　'10 早稲田大 ＞

【戦略】

条件から整数解 $x=\alpha$ をもつので，代入すれば

$$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0$$

となります。

整数問題の基本の 1 つである「積の形からの約数拾い」を睨み

$$\alpha(\alpha^2+a\alpha+b)=-1$$

と変形すれば，α は -1 の約数であり $\alpha=1$ または -1 ということになります。

あとは場合分けを行い，文字消去をしながら処理していきます。

【解答】

$x^3+ax^2+bx+1=0$ …(*) は $x=0$ を解にはもたない。

題意の整数解を $x=\alpha$ (α は $\alpha \fallingdotseq 0$ である整数) とすると

$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+1=0$，すなわち $\alpha(-\alpha^2-a\alpha-b)=1$ … ① を得る。

$$-\alpha^2-a\alpha-b=\frac{1}{\alpha}$$

であり，左辺は整数であるから，右辺も整数。

よって，α は 1 の約数であり，$\alpha=1$ または $\alpha=-1$

(i)　$\alpha=1$ のとき

① より，$1\cdot(-1^2-a\cdot1-b)=1$ で，$b=-a-2$

このとき，(*) は $x^3+ax^2-(a+2)x+1=0$

これは $(x-1)\{x^2+(a+1)x-1\}=0$ と変形できる。

$x^2+(a+1)x-1=0$ について，判別式を D_1 とすると

$D_1=(a+1)^2+4>0$ なので，(*) の解は全て実数解となる。

すなわち条件を満たさず，不適。

(ii)　$\alpha=-1$ のとき

① より，$(-1)\{-(-1)^2-a\cdot(-1)-b\}=1$ で，$b=a$

このとき，(*) は $x^3+ax^2+ax+1=0$

これは $(x+1)\{x^2+(a-1)x+1\}=0$

$x^2+(a-1)x+1=0$ について，判別式を D_2 とすると

$$\begin{aligned}D_2&=(a-1)^2-4\\&=a^2-2a-3\\&=(a+1)(a-3)\end{aligned}$$

条件より，$D_2<0$ なので，$-1<a<3$

これを満たす整数 a は $a=0$，1，2

$a=b$ なので，$(a,\ b)=(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$ … 答

【復習用問題】

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重解も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残り 2 つは虚数であるという。このとき，a，b，c の値を求めよ。

＜ ’02 京都大 ＞

【戦略】

この整数解が $x=1$ or $x=-1$ であることに気が付く必要があります。

これがスッと出てくるかどうかは，合格者にとっての基本事項である次の事項を常識にしているかどうかで決まります。

> **整数係数の方程式** $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$ **が有理数解をもつとしたら**
>
> $$x=\frac{a_0\text{の約数}}{a_n\text{の約数}}$$
>
> **という形に限られる。**
>
> **（さらに $a_n=1$ だと 有理数解 $\Longrightarrow$ 整数解 ということも分かる）**

この山場さえクリアーできれば，4 次のうち 2 次分の因数が分かることになりますから，残る 2 次方程式が虚数解をもつということを翻訳して，手なりに処理していけば完答が見えてきます。

【解答】

$f(x)=0$ の整数解を $x=\alpha$ とすると，$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+1=0$

よって，$\alpha(-\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha-c)=1$

$f(x)=0$ は明らかに $x=0$ という解をもたないので，$\alpha\neq 0$ であり，

$$-\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha-c=\frac{1}{\alpha}$$

左辺は整数なので，右辺も整数であり，α は 1 の約数，つまり

$$\alpha=1 \text{ または } \alpha=-1$$

このことから，$f(x)=0$ の整数解があるとしたら，それは

$$x=1,\ \text{または}\ x=-1$$

と分かる。

(i)　$f(x)=0$ の 2 つの整数解がともに $x=-1$ のとき

実数 p を用いて　（注：x^4 の係数，及び定数項が 1 ）

$f(x)=(x+1)^2(x^2+px+1)$ … ① と表せる。

条件から $x^2+px+1=0$ が虚数解をもつので，
この判別式を D_1 とすると

$D_1=p^2-4<0$，すなわち，$-2<p<2$ …②

① より，$f(x)=x^4+(p+2)x^3+2(p+1)x^2+(p+2)x+1$ なので，

$$\begin{cases} a=p+2 \\ b=2(p+1) \\ c=p+2 \end{cases}$$

a，b，c は整数なので，p も整数となり，② から $p=-1$，0，1

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 2)$，$(3,\ 4,\ 3)$

(ii)　$f(x)=0$ の 2 つの整数解がともに $x=1$ であるとき

実数 q を用いて $f(x)=(x-1)^2(x^2+qx+1)$ … ③ と表せる。

条件から $x^2+qx+1=0$ が虚数解をもつので，
この判別式を D_2 とすると

$D_2=q^2-4<0$，すなわち，$-2<q<2$ …④

③ より，$f(x)=x^4+(q-2)x^3+2(1-q)x^2+(q-2)x+1$ なので，

$$\begin{cases} a=q-2 \\ b=2(1-q) \\ c=q-2 \end{cases}$$

a，b，c は整数なので，q も整数となり，④ から $q=-1$，0，1

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3)$，$(-2,\ 2,\ -2)$，$(-1,\ 0,\ -1)$

(iii)　$f(x)=0$ の 2 つの整数解が $x=1$，$x=-1$ であるとき

実数 r を用いて $f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+rx-1)$ … ⑤ と表せる。

$x^2+rx-1=0$ の判別式を D_3 とすると

$D_3=r^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ の解は全て実数となり，条件を満たさない。

以上 (i)，(ii)，(iii) から求める a，b，c の値の組は

$(a, b, c)=(\pm1, 0, \pm1), (\pm2, 2, \pm2), (\pm3, 4, \pm3)$ (複号同順) … 答

【総括】

【戦略】でも述べた

整数係数の方程式　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$ が有理数解をもつとしたら

$$x=\frac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$$

という形に限られる。

（さらに $a_n=1$ だと 有理数解 $\Longrightarrow$ 整数解 ということも分かる）

という基本事項がカギになっていますが，この基本事項と本問を結びつける方向性にいけたかどうかも差を生むでしょう。

これについては，難関大を目指すにあたっては，証明まで含めて準備しておくことが望ましいでしょう。

補足

整数係数の方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0 \quad \cdots (*)$$

が有理数解をもつとしたら

$$x=\frac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}} \text{ という形に限られる } \cdots (★)$$

ということの証明

証明

$x=\dfrac{q}{p}$ (p は自然数，q は整数，p，q は互いに素）という有理数解をもつときを考える。

$$a_n\cdot\frac{q^n}{p^n}+a_{n-1}\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}+\cdots\cdots+a_1\cdot\frac{q}{p}+a_0=0 \quad \cdots (☆)$$

経験がモノを言います。

(整数)＝(分数) の形を狙うのが目的です。

(☆) の両辺に p^{n-1} をかけると，$\dfrac{a_nq^n}{p}+(\text{整数})=0$

移項すれば，$\dfrac{a_nq^n}{p}$ は整数だと分かり，p，q は互いに素なので，

p は a_n の約数

一方，(☆) の両辺に p^n をかけると，$a_0p^n+qM=0$ (M は整数) の形となる。

ゆえに $-M=\dfrac{a_0p^n}{q}$ で，$\dfrac{a_0p^n}{q}$ は整数となり，p，q は互いに素なので，

q は a_0 の約数

ゆえに，有理数解 $x=\dfrac{q}{p}$ をもつとしたら，$x=\dfrac{a_0\text{ の約数}}{a_n\text{ の約数}}$ の形に限られる。

補足

特に，x^n の係数が 1 であるとき，$(*)$ はモニック方程式と呼ばれます。

モニック方程式が有理数解をもつならば，その有理数解が実は整数解となることも有名事実であり，入試としても頻出の話題です。

$a_n=1$ のとき，(★) より，モニック方程式の有理数解は

$x=\dfrac{a_0\text{ の約数}}{1\text{ の約数}}=(\text{整数})$ となることが即座に分かります。