A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点は与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点は与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。

たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

＜ ’13 東京大 ＞

【戦略】

具体的な数で実験してみると，様子は掴めますが，なかなか核心に触れるまではいきません。

ほとんど裏が出るこのゲーム，数少ない表をどのタイミングで誰が出すかという所に目をつけます。

まずは状態推移をきちんと把握しましょう。

「裏が偶数回連続すると手番が戻ってくる」
「裏が奇数回連続すると手番が相手に渡る」

と，本問の急所を噛み砕いて言語化できればかなり前進です。

また，表が出ることを ○，裏が出ることを × とすると，○，× となる確率はともに同じ $\dfrac{1}{2}$ ですから，結局は

□　□　□　……　□
1 回目　2 回目　3 回目　　n 回目

という n 回のうち題意を満たすような ○と×の 並び方が何通りあるか。

が分かればいいことも冷静に判断したいところです。

(例えば ☆ 通り だったら $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{☆}$ ですからね。)

【解答】

裏が偶数回連続すると手番は戻ってくる。
裏が奇数回連続すると手番は相手にわたる。

(A の得点，B の得点) と表すと，A が勝つまでの状態推移は次のようになる。

①：$(0,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (2,0)$

②：$(0,0) \longrightarrow (1,0) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (2,1)$

③：$(0,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (1,1) \longrightarrow (2,1)$

表が出ることを ○，裏が出ることを×と表す。

＜ ① のとき＞

手番　A ⟶ A ⟶ A
$\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc$

A の 1 点目は奇数回目，A の 2 点目は偶数回目である。

よって，n 回目で A が勝つとき n は偶数。

$n=2m\quad(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする。

A の 1 点目をとるタイミングは
　1 回目，3 回目，5 回目，……，$2m-1$ 回目の m 通り

$$\therefore\quad m\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}=\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\left(\because\ n=2m\ \text{より}\ m=\frac{n}{2}\right)$$

＜ ② のとき＞

手番　A ⟶ A ⟶ B ⟶ A
$\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{偶数回}}\bigcirc\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\bigcirc$

A の 1 点目は奇数回目，B の 1 点目は奇数回目，A の 2 点目は奇数回目。

n 回目で A が勝つとき，n は 5 以上の奇数であり，
$$n=2m+1\quad(m=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
とする。

A，B の 1 点目をとるタイミングは

$$1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$$

の m 個の奇数から 2 つ選んで
$${}_m\mathrm{C}_2=\frac{m(m-1)}{2}\ \text{通り}$$

$$\therefore\quad \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}=\frac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\quad(\text{これは}\ n=1,\ 3\ \text{のときも成立})$$

＜③のとき＞

$$\begin{array}{llllllll} \text{手番} & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\ & \multicolumn{7}{l}{\underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\ \bigcirc\ \underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{奇数回}}\ \bigcirc\ \underbrace{\times\times\times\cdots\cdots\times}_{\text{偶数回}}\ \bigcirc} \end{array}$$

Bの1点目は偶数回目，Aの1点目は偶数回目，Aの2点目は奇数回目。

n 回目でAが勝つとき，n は5以上の奇数であり，

$$n=2m+1\quad(m=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とする。

B，Aの1点目をとるタイミングは

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2m$$

の m 個の偶数から2つ選んで

$${}_m\mathrm{C}_2=\frac{m(m-1)}{2}\ \text{通り}$$

$$\therefore\quad \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}=\frac{\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\quad(\text{これは}\ n=1,\ 3\ \text{のときも成立})$$

以上より，求める確率 $p(n)$ は

$$p(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} & (n\ \text{が偶数のとき})\\[2ex] (n-1)(n-3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2} & (n\ \text{が奇数のとき})\end{cases}\quad\cdots\boxed{\text{答}}$$

【総括】

昔のバレーボールには「サーブ権」というものがあり，まずサーブ権をもったチームがサーブを打ってスタートします。

サーブ権をもった状態で攻撃が成功すると，初めて得点になります。

逆に相手のサーブからスタートし，自チームが攻撃に成功してもダイレクトに得点につながるというわけではなく，相手のサーブ権が自チームにうつってくるというシステムです。

つまり，サーブ権がない状態から得点しようと思うと，まず攻撃を決めてサーブ権を自チームにもってきてから、再び攻撃を決めないといけないということです。

本問はそのサーブ権の流れやルールを単純にモデル化したものです。

実験をして，「どうやら n の偶奇で様子が違うぞ」ということは感覚的には分かりますが，その違いを数式や言葉で説明しようと思っても、腑に落ちる説明が難しいと思います。

振り返ってみると，特別なことは何もしていないのですが，言葉にできない難しさを感じたことでしょう。

事象の言語化など，分析力や表現力を含めた「確かな総合力」を要求する東大が好みそうな問題です。