

サーブ権のあるゲームの得点推移

A, Bの2人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の  
コインが1枚あり、最初はAがそのコインを持っている。次の操作を  
繰り返す。

- (i) Aがコインを持っているときは、コインを投げ、表が出ればAに  
1点を与え、コインはAがそのまま持つ。裏が出れば、両者に点  
は与えず、AはコインをBに渡す。
- (ii) Bがコインを持っているときは、コインを投げ、表が出ればBに  
1点を与え、コインはBがそのまま持つ。裏が出れば、両者に点  
は与えず、BはコインをAに渡す。

そしてA, Bのいずれかが2点を獲得した時点で、2点を獲得した方の  
勝利とする。

たとえば、コインが表、裏、表、表と出た場合、この時点でAは  
1点、Bは2点を獲得しているのでBの勝利となる。

A, Bあわせてちょうど $n$ 回コインを投げ終えたときにAの勝利と  
なる確率 $p(n)$ を求めよ。

< ' 13 東京大 >

【戦略】

具体的な数で実験してみると、様子は掴めますが、なかなか核心に触れる  
まではいきません。

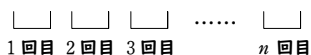
ほとんど裏が出るこのゲーム、数少ない表をどのタイミングで誰が出すか  
という所に目をつけます。

まずは状態推移をきちんと把握しましょう。

「裏が偶数回連続すると手番が戻ってくる」  
「裏が奇数回連続すると手番が相手に渡る」

と、本問の急所を噛み砕いて言語化できればかなり前進です。

また、表が出ることを○、裏が出ることを×とすると、○、×となる確  
率はともに同じ $\frac{1}{2}$ ですから、結局は



という $n$ 回のうち題意を満たすような○と×の並び方が何通りあるか。

が分かればいいことも冷静に判断したいところです。

(例えば☆通りだったら $(\frac{1}{2})^*$ ですからね。)

【解答】

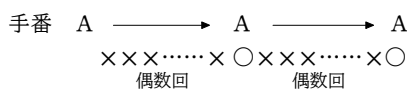
裏が偶数回連続すると手番は戻ってくる。  
裏が奇数回連続すると手番は相手にわたる。

(Aの得点, Bの得点)と表すと、Aが勝つまでの状態推移は次のように  
なる。

- ①: (0, 0) → (1, 0) → (2, 0)
- ②: (0, 0) → (1, 0) → (1, 1) → (2, 1)
- ③: (0, 0) → (0, 1) → (1, 1) → (2, 1)

表が出ることを○、裏が出ることを×と表す。

< ①のとき >



Aの1点目は奇数回目、Aの2点目は偶数回目である。

よって、 $n$ 回目でAが勝つとき $n$ は偶数。

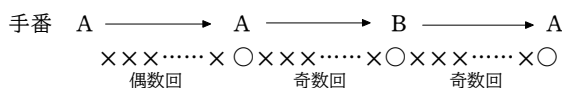
$n = 2m$  ( $m = 1, 2, \dots$ )とする。

Aの1点目をとるタイミングは

1回目, 3回目, 5回目, ...,  $2m - 1$ 回目の $m$ 通り

$$\therefore m \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\because n = 2m \text{ より } m = \frac{n}{2})$$

< ②のとき >



Aの1点目は奇数回目、Bの1点目は奇数回目、Aの2点目は奇数回  
目。

$n$ 回目でAが勝つとき、 $n$ は5以上の奇数であり、  
 $n = 2m + 1$  ( $m = 2, 3, \dots$ )

とする。

A, Bの1点目をとるタイミングは

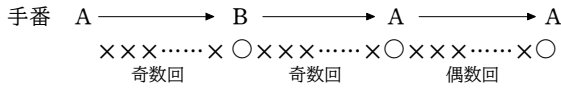
1, 3, 5, ...,  $2m - 1$

の $m$ 個の奇数から2つ選んで

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2} \text{ 通り}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} &= \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (n-1)(n-3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \quad (\text{これは } n=1, 3 \text{ のときも成立}) \end{aligned}$$

< ③ のとき >



Bの1点目は偶数回目、Aの1点目は偶数回目、Aの2点目は奇数回目。

$n$  回目で A が勝つとき、 $n$  は 5 以上の奇数であり、  
 $n = 2m + 1$  ( $m = 2, 3, \dots$ )  
 とする。

B, A の 1 点目をとるタイミングは

$$2, 4, 6, \dots, 2m$$

の  $m$  個の偶数から 2 つ選んで

$${}_m C_2 = \frac{m(m-1)}{2} \text{ 通り}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} &= \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (n-1)(n-3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \quad (\text{これは } n=1, 3 \text{ のときも成立}) \end{aligned}$$

以上より、求める確率  $p(n)$  は

$$p(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ (n-1)(n-3) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad \dots \text{ 罫}$$

【総括】

昔のバレーボールには「サーブ権」というものがあり、まずサーブ権をもったチームがサーブを打ってスタートします。

サーブ権をもった状態で攻撃が成功すると、初めて得点になります。

逆に相手のサーブからスタートし、自チームが攻撃に成功してもダイレクトに得点につながるというわけではなく、相手のサーブ権が自チームにつつてくるというシステムです。

つまり、サーブ権がない状態から得点しようと思うと、まず攻撃を決めてサーブ権を自チームにもってきってから、再び攻撃を決めないといけないということです。

本間はそのサーブ権の流れやルールを単純にモデル化したものです。

実験をして、「どうやら  $n$  の偶奇で様子が違うぞ」ということは感覚的には分かりますが、その違いを数式や言葉で説明しようと思っても、腑に落ちる説明が難しいと思います。

振り返ってみると、特別なことは何もしていないのですが、言葉にできない難しさを感じたことでしょう。

事象の言語化など、分析力や表現力を含めた「確かな総合力」を要求する東大が好みそうな問題です。