

オイラーの無限積 ヴィエトの公式

【幾何的手法】

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 ($n \geq 2$) の面積を S_n , 周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $S_n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$, $L_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2^n}$, $\frac{S_n}{L_n} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{S_2}{L_2} \frac{S_3}{L_3} \cdots \frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。

< '12 金沢大 >