オイラーの無限積　ヴィエトの公式

【幾何的手法】

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形（$n \geqq 2$）の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　$S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$　を示せ。

(2)　$\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$　を示せ。

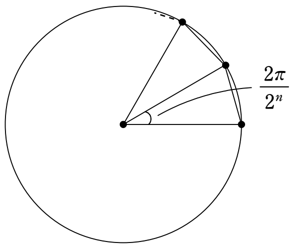
(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$　を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n \frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$　を求めよ。

< '12 金沢大 >

【戦略】

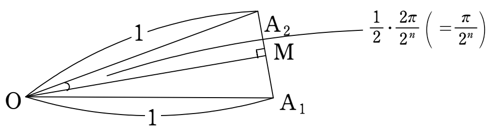
円の中心を O
正 2^n **角形の各頂点を**
A_1，A_2，……，A_{2^n}
とします。



三角形 OA_1A_2 **の面積や弦の長さ** A_1A_2 **に注目して立式していきます。**

【解答】

(1)　円の中心を O，正 2^n 角形の各頂点を A_1，A_2，……，A_{2^n} とする。



$\triangle OA_1A_2$ に注目し，線分 A_1A_2 の中点を M とする。

$$\triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$S_n = 2^n \times \triangle OA_1A_2$ であるので

$S_n = 2^n\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}} = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ となり，示された。

また，$A_1A_2 = 2\,A_2M = 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$

$L_n = 2^n\,A_1A_2$ であるので，

$L_n = 2^n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{2^n} = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ となり，示された。

(2)　(1) の結果より

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$\frac{S_n}{L_n} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

となり，示された。

$n\to\infty$ のとき
正 2^n 角形は
ほぼ円
なので，この結果は予想の範疇です

(3)　$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{\pi}} = \pi \quad\cdots\text{答}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}}$$

$$= \frac{S_2}{S_{n+1}} \to \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\quad(n\to\infty)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}$　…　答

(4)　(2) の結果から　$2\cdot\dfrac{S_n}{L_n} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

$$2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n} = 2\cdot\frac{2S_2}{L_2}\cdot\frac{2S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{2S_n}{L_n}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

(3) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n} = 2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\cdots\text{答}$$

【総括】

⑶ の結果がヴィエトの公式です。

三角比，三角関数の歴史は東洋，西洋で独自に発展の歴史を遂げていますから非常に複雑なのですが，西洋においてオイラーが三角比という幾何的道具から，三角「関数」という解析的手法に発展させたのは１８世紀です。

どれだけ開いているか　→　どれだけ回転したか

と角度を「回転量」として捉え，一般角として体系的にまとめたのもオイラーだと言われています。

そのオイラーの 100 年ほど前にフランソワ・ヴィエトの幾何的な手法によって

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

が得られたわけです。

今でこそ，過去の偉人たちの手により，道具や手法が揃い，体系化されていますが，三角関数として本格的に体系化される 100 年も前に独自でこの式に辿り着いたことに敬意を表します。

ちなみにヴィエトは本職は法律家です。

同じような法律家で本職の合間に数学を研究した有名人としては
ピエール・ド・フェルマーが有名ですね。