オイラーの無限積　ヴィエトの公式

【別路線】

数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ を次のように定義する。

$$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

< '01 千葉大 >

【戦略】

(1) については右辺から攻めていけば，等式が繋がります。
（目がチカチカするので，置き換えをしながら進めていきます。）

(2) については (1) から $\sum$ 計算の手法の 1 つである「差分解」からの

「和の中抜け」

を狙っていきます。

【解答】

(1) $\theta_n=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ とおくと，$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$，$a_n=\tan\theta_n$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\tan\theta_n}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\tan 2\theta_{n+1}}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\dfrac{2\tan\theta_{n+1}}{1-\tan^2\theta_{n+1}}}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{1-\tan^2\theta_{n+1}}{\tan\theta_{n+1}}\\&=\frac{\tan^2\theta_{n+1}}{\tan\theta_{n+1}}\\&=\tan\theta_{n+1}\\&=a_{n+1}\end{aligned}$$

となり，示された。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}$ とおく。

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}\\&=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{2^k}\\&=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{2}{a_{k-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})\qquad\left(b_k=\frac{1}{2^ka_k}\ \text{とおいた}\right)\\&=\frac{1}{2}+\{(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots\cdots+(b_n-b_{n-1})\}\\&=\frac{1}{2}+(b_n-b_1)\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^na_n}-\frac{1}{2a_1}\right)\\&=\frac{1}{2^na_n}\\&=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\\&=\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2}{\pi}}{\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

番号を下げるにあたり $k\geqq2$ でなければなりません。

ここで，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ であることに注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{\pi}$$

以上から，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\frac{2}{\pi}\ \cdots\ \text{答}\end{aligned}$$

【総括 2】

オイラーの無限積

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdots=\frac{\sin x}{x}\quad\cdots\text{①}$$

において，$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

を得ます。

具体的には

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

ということになります。

これは「ヴィエトの公式」と呼ばれます。

ちなみに

【 2005 名古屋大のオチ】

$$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\tan\frac{\pi}{16}+\cdots\cdots=\frac{1}{\pi}\quad\cdots\text{②}$$

【 2001 千葉大のオチ 】

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{16}+\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}\quad\cdots\text{②}'$$

と並べてみます。

① のもととなる

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

の両辺の自然対数をとり，微分することで ② を得ました。

特に，それとほぼ同様な ②′ の無限和の結果はヴィエトの公式と同じ結果です。

② や ②′ には名前がついていないようです。
（本家ヴィエトの公式に対して，言うなれば分家ヴィエトの公式？）

ただ，ヴィエトの手法は別にあり，そのアプローチについては以下の金沢大学の問題が参考になります。