実数 x および自然数 n に対して

$$a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) x の値を決めると，$2^n a_n\sin\frac{x}{2^n}$ の値は，n の値と無関係に一定であることを証明せよ。

(2) $\log|a_n|$ を x で微分することにより，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ を証明せよ。

＜ '05 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **「本当かよ」と疑ってかかる人は実験してみるでしょう。**

$n=1$ **のとき** $2^1a_1\sin\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$

$n=2$ **のとき**

$$\begin{aligned}2^2a_2\sin\frac{x}{2^2}&=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\\&=4\cos\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\\&=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=\sin x\end{aligned}$$

多分このあたりから要領はつかめていると思いますが，ダメ押しで

$n=3$ **のとき**

$$\begin{aligned}2^3a_3\sin\frac{x}{2^3}&=8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\sin\frac{x}{8}\\&=8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}\right)\\&=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\\&=\sin x\ (n=2\ \textbf{のときと一緒})\end{aligned}$$

要するに，2 倍角の公式によって次々と連鎖して消えていくイメージが出来てくるでしょう。
（ぷよぷよみたいですね。←ぷよぷよを知らない方はごめんなさい）

もちろん，「……」を用いて原始的に表現してもいいのですが，ここでは，$b_n=2^na_n\sin\frac{x}{2^n}$ と置きなおして，$b_{n+1}=b_n$ を目指します。（数列 $\{b_n\}$ が n によらない定数列であることを目指す）

(2) $a_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ **という最初の関係式において両辺 $\log$ をとって x で微分することで**

$$\frac{d}{dx}\log|a_n|=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

という本問で話題となる $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$ を含む形が現れます。

一方で，(1) から a_n は $2^na_n\sin\frac{x}{2^n}=\sin x$ ，すなわち

$a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ **と「……」を用いずに表現できるわけです。**

同様に，両辺 $\log$ をとって x で微分し，先ほどの式と結びつけると手なりにゴールが見えてきます。

【解答】

(1) $b_n=2^na_n\sin\frac{x}{2^n}$ とおく。

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=2^{n+1}a_{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\\&=2^{n+1}a_n\cos\frac{x}{2^{n+1}}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\\&=2^na_n\sin\left(2\cdot\frac{x}{2^{n+1}}\right)\\&=2^na_n\sin\frac{x}{2^n}\\&=b_n\end{aligned}$$

よって，$b_n=b_1=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$ … ①

これより，$2^na_n\sin\frac{x}{2^n}$ の値は n の値によらず一定値である。

(2) $\log|a_n|=\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\log\left|\cos\frac{x}{2^2}\right|+\cdots+\log\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log|a_n|&=\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\frac{-\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}}{\cos\frac{x}{2^2}}+\cdots+\frac{-\frac{1}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\cos\frac{x}{2^n}}\\&=-\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\\&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}\ \cdots ②\end{aligned}$$

一方，① より $2^na_n\sin\frac{x}{2^n}=\sin x$ であり，$a_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$$\log|a_n|=\log\frac{1}{2^n}+\log|\sin x|-\log\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|$$

両辺 x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log|a_n|&=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\ \cdots ③\end{aligned}$$

②，③ より

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$ ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}-\frac{\cos x}{\sin x}$$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{1}{\pi}\ \longrightarrow\ \frac{1}{\pi}\quad(n\to\infty)$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ であることが示された。

【総括】

丁寧な誘導がついているために，何をすればよいのか見当もつかないということはないでしょう。

本問は

$$\begin{aligned}\sin x&=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=2\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\right)\ \left(=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}\right)\\&=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\left(2\cos\frac{x}{2^3}\sin\frac{x}{2^3}\right)\ \left(=2^3\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\sin\frac{x}{2^3}\right)\\&\ \vdots\\&\ \vdots\\&=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\ \sin\frac{x}{2^n}\end{aligned}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\ \longrightarrow\ \frac{\sin x}{x}\quad(n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

という「オイラーの無限積」というカラクリが背景にあります。

個人的に好きなカラクリの一つです。

(2) はヒントがあるから何とかなるものの，ノーヒントだとキツイものがありますね。

ちなみにオチが同じで，別路線の問題が千葉大学で出題されていたので併せて紹介しておきます。

【別路線】

数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ を次のように定義する。

$$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の無限級数の和を求めよ。 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

＜ ’01 千葉大 ＞

【戦略】

(1) については右辺から攻めていけば，等式が繋がります。
（目がチカチカするので，置き換えをしながら進めていきます。）

(2) については (1) から $\sum$ 計算の手法の 1 つである「差分解」からの

「和の中抜け」

を狙っていきます。

【解答】

(1) $\theta_n=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ とおくと，$\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$，$a_n=\tan\theta_n$ であるので

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\tan\theta_n}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\tan2\theta_{n+1}}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{2}{\dfrac{2\tan\theta_{n+1}}{1-\tan^2\theta_{n+1}}}\\&=\frac{1}{\tan\theta_{n+1}}-\frac{1-\tan^2\theta_{n+1}}{\tan\theta_{n+1}}\\&=\frac{\tan^2\theta_{n+1}}{\tan\theta_{n+1}}\\&=\tan\theta_{n+1}\\&=a_{n+1}\end{aligned}$$

となり，示された。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}\\
&=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{2^k}\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{2}{a_{k-1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})\quad\left(b_k=\frac{1}{2^k a_k}\ \text{とおいた}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\{(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots\cdots+(b_n-b_{n-1})\}\\
&=\frac{1}{2}+(b_n-b_1)\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^n a_n}-\frac{1}{2a_1}\right)\\
&=\frac{1}{2^n a_n}\\
&=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}\\
&=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\frac{2}{\pi}}{\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}
\end{aligned}
$$

ここで，$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ であることに注意すると，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{\pi}$$

以上から，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n$

$$=\frac{2}{\pi}\ \cdots\ 答$$

【総括 2】

オイラーの無限積

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ \cdots\cdots\ =\frac{\sin x}{x}\ \cdots\ ①$$

において，$x=\frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

を得ます。

具体的には

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

ということになります。

これは「ヴィエトの公式」と呼ばれます。

ちなみに

【2005 名古屋大のオチ】

$$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\tan\frac{\pi}{16}+\cdots\cdots=\frac{1}{\pi}\ \cdots\ ②$$

【2001 千葉大のオチ】

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{16}+\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}\ \cdots\ ②'$$

と並べてみます。

① のもととなる

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

の両辺の自然対数をとり，微分することで ② を得ました。

特に，それとほぼ同様な ②′ の無限和の結果はヴィエトの公式と同じ結果です。

② や ②′ には名前がついていないようです。
（本家ヴィエトの公式に対して，言うなれば分家ヴィエトの公式？）

ただ，ヴィエトの手法は別にあり，そのアプローチについては以下の金沢大学の問題が参考になります。

【幾何的手法】

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形（$n \geqq 2$）の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

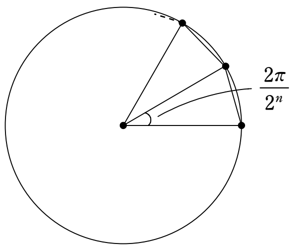
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\,\dfrac{S_2}{L_2}\,\dfrac{S_3}{L_3}\cdots\dfrac{S_n}{L_n}$ を求めよ。

＜ '12 金沢大 ＞

【戦略】

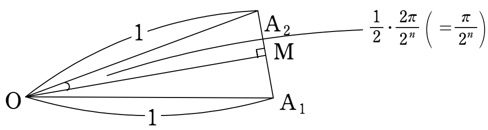
円の中心を O
正 2^n **角形の各頂点を**
A_1，A_2，……，A_{2^n}
とします。



三角形 OA_1A_2 **の面積や弦の長さ** A_1A_2 **に注目して立式していきます。**

【解答】

(1) 円の中心を O，正 2^n 角形の各頂点を A_1，A_2，……，A_{2^n} とする。



$\triangle OA_1A_2$ に注目し，線分 A_1A_2 の中点を M とする。

$\triangle OA_1A_2 = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\dfrac{2\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$

$S_n = 2^n \times \triangle OA_1A_2$ であるので

$S_n = 2^n\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}} = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$ となり，示された。

また，$A_1A_2 = 2\,A_2M = 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}$

$L_n = 2^n\,A_1A_2$ であるので，

$L_n = 2^n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{2^n} = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ となり，示された。

(2) (1) の結果より

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{2^n}}{2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$\frac{S_n}{L_n} = \frac{2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\cos\dfrac{\pi}{2^n}}{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

となり，示された。

$n \to \infty$ のとき
正 2^n 角形は
ほぼ円
なので，この結果
は予想の範疇です

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{\pi}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\pi}} = \pi$ … 答

$$\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}}$$

$$= \frac{S_2}{S_{n+1}} \to \frac{2\sin\dfrac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\quad (n\to\infty)$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{2}{\pi}$ … 答

(4) (2) の結果から $2\cdot\dfrac{S_n}{L_n} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

$$2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n} = 2\cdot\frac{2S_2}{L_2}\cdot\frac{2S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{2S_n}{L_n}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

(3) の結果から

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\cdot\frac{S_2}{L_2}\cdot\frac{S_3}{L_3}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{L_n} = 2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}\ \cdots\text{答}$$

【総括 3】

⑶ の結果がヴィエトの公式です。

三角比，三角関数の歴史は東洋，西洋で独自に発展の歴史を遂げていますから非常に複雑なのですが，西洋においてオイラーが三角比という幾何的道具から，三角「関数」という解析的手法に発展させたのは１８世紀です。

どれだけ開いているか　→　どれだけ回転したか

と角度を「回転量」として捉え，一般角として体系的にまとめたのもオイラーだと言われています。

そのオイラーの 100 年ほど前にフランソワ・ヴィエトの幾何的な手法によって

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

が得られたわけです。

今でこそ，過去の偉人たちの手により，道具や手法が揃い，体系化されていますが，三角関数として本格的に体系化される 100 年も前に独自でこの式に辿り着いたことに敬意を表します。

ちなみにヴィエトは本職は法律家です。

同じような法律家で本職の合間に数学を研究した有名人としては
ピエール・ド・フェルマーが有名ですね。