p を素数とする。x に関する 2 次方程式

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

が整数解をもつのは $p=2$ のときに限ることを示せ。

＜ '03 千葉大 ＞

【戦略】

整数解をもつと言っているので，$x=m$ (m：整数) と設定します。

そうすることで

$pm^2+(5-p^2)m-3p=0$ **を満たす素数 p と整数 m を求める**

という，いわば「不定方程式を解く」ということに帰着します。

整数問題を解く基本方針としては

積の形から約数を拾う
余りで分類
範囲を絞る (評価する)

という方針がありますが，積の形が狙えそうなので，積の形にしていこうと思います。

$$p(m^2-pm-3)=-5m$$

と，まとめると，p が素数であることから

$p=5$ **または** m **が** p **の倍数**

ということが言えます。

$p=5$ **のときは具体的なのですぐに検証可能です。**

m **が** p **の倍数であるときは** $m=pk$ (k は整数) **とおいて進めていくと**

$$(p^2k-p^2+5)k=3$$

という式を Get できます。

このことから $k=\pm1$，±3 と絞られますから，ここまでくればあとは個別検証すればよいでしょう。

【解１】

$x=m$ (m：整数) を解にもつときを考える。

このとき $pm^2+(5-p^2)m-3p=0$

これは，$p(m^2-pm-3)=-5m$ …① と変形できる。

p が素数であることを考えると

$p=5$ または m がp の倍数

(i) $p=5$ のとき

① より $m^2-5m-3=-m$，すなわち $m^2-4m-3=0$

これより，$m=2\pm\sqrt{7}$ を得るが，m が整数であることに反する。

(ii) m が p の倍数であるとき

$m=pk$ (k は整数) とおくと，① より $p(p^2k^2-p^2k-3)=-5pk$

これより $p^2k^2-p^2k-3=-5k$ で，整理すると

$$(p^2k-p^2+5)k=3 \quad \cdots ②$$

これより，k は 3 の約数であり，$k=\pm1$，±3

$k=1$ のとき ② より $5=3$ となり不合理

$k=-1$ のとき ② より $p^2=4$ p は素数より $p=2$

$k=3$ のとき ② より $p^2=-2$ でこれを満たす p は実数でない

$k=-3$ のとき ② より $p^2=\dfrac{3}{2}$ でこれを満たす p は整数でない

以上から $p=2$ であることが必要である。

このとき，与えられた 2 次方程式は

$2x^2+x-6=0$，すなわち $(2x-3)(x+2)=0$ であり，整数解 $x=-2$ をもつ。

以上から，与えられた 2 次方程式が整数解をもつような素数 p は $p=2$ に限られる。

【戦略２】

【解 1】 の (ii) のときにおいて $p^2k^2-p^2k-3=-5k$ という式から

$$p^2(k^2-k)=-5k+3$$

と変形してやります。

k は整数であることから，$k^2-k=k(k-1)\geqq 0$ が成り立ちます。

よって，$2^2(k^2-k)\leqq p^2(k^2-k)=-5k+3$，すなわち

$4k^2+k-3\leqq 0$ と k の範囲を絞ることができます。

この 2 次不等式を解くと $-1\leqq k\leqq\dfrac{3}{4}$ となることから $k=-1$，0 を得るため，あとは個別検証です。

【解１の部分的別解】(ii) m が p の倍数であるとき 以降

$m=pk$ (k は整数) とおくと，① より $p(p^2k^2-p^2k-3)=-5pk$

これより $p^2k^2-p^2k-3=-5k$ で，整理すると

$$p^2(k^2-k)=-5k+3 \ \cdots(*)$$

k は整数であるので，$k^2-k=k(k-1)\geqq 0$ であるため

$2^2(k^2-k)\leqq p^2(k^2-k)$ より，$4(k^2-k)\leqq -5k+3$

これを整理すると $4k^2+k-3\leqq 0$，すなわち $(4k-3)(k+1)\leqq 0$

したがって $-1\leqq k\leqq\dfrac{3}{4}$ であり，これを満たす整数 k は

$$k=-1\ ,\ 0$$

$k=-1$ のとき $(*)$ より $2p^2=8$ となり，p は素数なので $p=2$

$k=0$ のとき $(*)$ より $p^2\cdot 0=3$ となりこれを満たす p は存在しない。

これより $p=2$ であることが必要である。

このとき，与えられた 2 次方程式は

$2x^2+x-6=0$，すなわち $(2x-3)(x+2)=0$ であり，整数解 $x=-2$ をもつ。

以上から，与えられた 2 次方程式が整数解をもつような素数 p は
$p=2$ に限られる。

【戦略３】

２次方程式が整数解をもつので，判別式を D としたとき

D が平方数である

ということが必要になってきます。

その条件から出てくる不定方程式を解いていきます。

【解２】

$px^2+(5-p^2)x-3p=0$ の判別式を D として

$D=(5-p^2)^2+12p^2$ であり，これが平方数であることが必要である。

よって，k を $k\geqq 0$ を満たす整数として

$$(5-p^2)^2+12p^2=k^2$$

を満たす p，k を考える。

平方完成は
「散らばっている変数を集める」
ための１つの手段です。

これを整理すると $p^4+2p^2+25=k^2$

$$(p^2+1)^2+24=k^2$$

$$k^2-(p^2+1)^2=24$$

$$\{k+(p^2+1)\}\{k-(p^2+1)\}=24 \ \cdots(☆)$$

ここで，$\{k+(p^2+1)\}+\{k-(p^2+1)\}=2k$（＝偶数）であるから

$k+(p^2+1)$，$k-(p^2+1)$ の偶奇は一致する。 … ①

また，$k\geqq 0$ なので，$k+p^2+1>0$ であり，(☆) より $k-(p^2+1)>0$

これより $0<k-(p^2+1)<k+(p^2+1)$ …②

①，② に注意して (☆) を考えると

$(k-p^2-1,\ k+p^2+1)=(2,\ 12),\ (4,\ 6)$

この k，p^2 についての連立方程式を解くと

$(k,\ p^2)=(7,\ 4),\ (5,\ 0)$

p は素数であることから $p=2$ を得る。

このとき，与えられた 2 次方程式は

$2x^2+x-6=0$，すなわち $(2x-3)(x+2)=0$ であり，整数解 $x=-2$ をもつ。

以上から，与えられた 2 次方程式が整数解をもつような素数 p は
$p=2$ に限られる。

【戦略４】

【解 1】では $pm^2+(5-p^2)m-3p=0$ を $p(m^2-pm-3)=-5m$ と見ましたが，

$$m(pm+5-p^2)=3p$$

と見ることで，p が素数であることから右辺の約数が拾えます。

ただ，m は通常の整数であることから，

$$m=\pm1,\ \pm3,\ \pm p,\ \pm3p$$

と数は多くなりますが，正面突破できないこともありません。

【解３】

$x=m$ (m：整数) を解にもつときを考える。

このとき $pm^2+(5-p^2)m-3p=0$

これは $m(pm+5-p^2)=3p$ $\cdots(*)$ と変形できる。

これより $m=\pm1,\ \pm3,\ \pm p,\ \pm3p$

$m=1$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2+2p-5=0$

$m=-1$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2-2p-5=0$

$m=3$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2-2p-5=0$

$m=-3$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2+2p-5=0$

$m=p$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2+5-p^2=3$（不合理）

$m=-p$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2=4$

$m=3p$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $2p^2=-4$（不合理）

$m=-3p$ のとき $(*)$ に代入して整理すると $p^2=\dfrac{3}{2}$

以上から，p が素数として存在するのは $m=-p$ のときのみ

よって，$p=2$ であることが必要である。

このとき，与えられた 2 次方程式は

$2x^2+x-6=0$，すなわち $(2x-3)(x+2)=0$ であり，整数解 $x=-2$ をもつ。

以上から，与えられた 2 次方程式が整数解をもつような素数 p は $p=2$ に限られる。

【総括】

「方程式が整数解をもつように」という設定の問題はよくある出題です。

特に２次方程式での出題は様々な解法が考えられます。

その際に言えることですが，

$$px^2+(5-p^2)x-3p=0$$

と右辺を $=0$ のままにしておくことに固執してしまうと，身動きがとりづらくなります。

臨機応変に移項して「左辺と右辺に振り分ける」という姿勢は本問を通じて学んでおきたいことの１つです。