　O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1)　∠APB を求めよ。

(2)　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

＜ ’03 東京大 ＞

【戦略 1】

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を回転＆拡大(縮小)させて $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を出すと捉えれば，複素数平面においては，$\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ を計算するのが自然です。(2) のことも考えて，向きまで含めて考察しておくのがよいでしょう。

点 P が表す複素数を z とすると，z がやけにゴッツイ形なのが気になるところですが，策に拘って時間を浪費したくはありませんし，ストレートに計算してしまっても許容範囲内の計算です。

(2) は P が ∠APB$=45^\circ$ を満たしながら動くので，優弧 AB 上を動くことが容易に分かります。

$t=3$ のときに $z=0$ ですから，この円は原点 O を通ることも留意すれば，OP が直径となるような P に対応する t を求めれば解決です。

【解 1】

(1)　A(α)，B(β) とする。(すなわち $\alpha=6$，$\beta=7+7i$ とおく)

また，$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ とする。

ここで，$z=\alpha$ とすると，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6$ であり，

$$14(t-3)=6\{(1-i)t-7\}$$

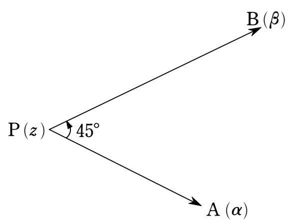
両辺の虚部を比較すると $-6t=0$，すなわち $t=0$ となり，$t>0$ に反する。

よって，$\alpha \neq z$ であり，$\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\beta-z}{\alpha-z}&=\frac{(7+7i)-\left\{\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}\right\}}{6-\left\{\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}\right\}}\\&=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}\\&=\frac{7}{2t}\cdot\frac{1+7i}{4+3i}\\&=\frac{7}{2t}(1+i)\\&=\frac{7\sqrt{2}}{2t}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\end{aligned}$$

ここの整理や分母の有理化は頑張って下さい

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の向きに測った角度は反時計回りの向きを正の向きとして 45°



すなわち ∠APB$=45^\circ$ …答

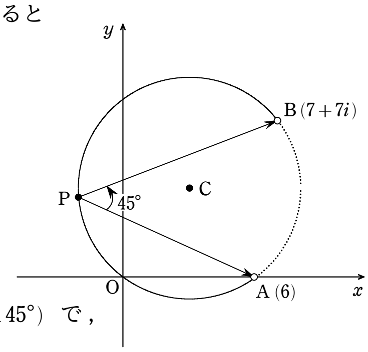
(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を反時計回りに 45° 回転させたベクトルと同じ向きであることから，点Pは下の図の円の実線部分を動く。

（$t\to 0$ とすると点Pは点Aに限りなく近づき，$t\to\infty$ とすると，点Pは点Bに限りなく近づく）

（また，$t=3$ のとき，$z=0$ なので，t を正の実数の範囲で動かしたときの点P(z)の軌跡が表す曲線は原点を通る）

この円の中心をCとし，C(γ) とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 45° 回転させて，
大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍すると
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ になるので



$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$ で，

$$\gamma-6=(1+7i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=-3+4i$$

よって，$\gamma=3+4i$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ であり，OPの長さが最大となるとき，OPがこの円の直径となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$，すなわち $z=6+8i$ となるときにOPは最大となる。

このとき，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i$

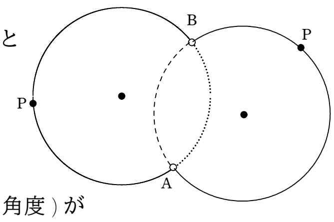
$$14(t-3)=(6+8i)\{(1-i)t-7\}$$

$$14(t-3)=(14t-42)+(2t-56)i$$

両辺の虚部を見比べて $2t-56=0$ であり，$t=28\,(>0)$ …答

注意

「$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を反時計回りに 45° 回転させたベクトルと同じ向きである」ということをはっきりさせておかないと右の図のような場合も発生してしまいます。



(1)で計算した $\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ の偏角（符号付き角度）が 45° であることから「　」内のことが言えます。

【(2) 戦略2】

原点との距離なので，$\left|\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}\right|$ を t の式で表してしまえば，微分という力業で押し切れてしまいます。

(1)の誘導を無視する形になるので，(1)が何かの拍子で出来なかった場合の緊急手段という位置づけにはなると思います。

(2)　【解2】

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=\frac{14(t-3)}{(t-7)-ti}$$
$$=\frac{14(t-3)\{(t-7)+ti\}}{(t-7)^2+t^2}$$
$$=\frac{14(t-3)(t-7)}{(t-7)^2+t^2}+\frac{14t(t-3)}{(t-7)^2+t^2}i$$

$$\left|\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}\right|^2=\left(\frac{14(t-3)(t-7)}{(t-7)^2+t^2}\right)^2+\left(\frac{14t(t-3)}{(t-7)^2+t^2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{14(t-3)}{(t-7)^2+t^2}\right)^2\{(t-7)^2+t^2\}$$
$$=\frac{196(t-3)^2}{(t-7)^2+t^2}$$
$$=98+\frac{98(2t-31)}{2t^2-14t+49}$$
$$=98\left\{1+\frac{2t-31}{2t^2-14t+49}\right\}$$

帯分数に直しましょう

$f(t)=\dfrac{2t-31}{2t^2-14t+49}$　$(t>0)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{2(2t^2-14t+49)-(2t-31)(4t-14)}{(2t^2-14t+49)^2}$$
$$=\frac{-4t^2+124t-336}{(2t^2-14t+49)^2}$$
$$=\frac{-4(t-3)(t-28)}{(2t^2-14t+49)^2}$$

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	28	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\left(-\dfrac{31}{49}\right)$	↘		↗	$\dfrac{1}{49}$	↘

線分OPの長さは最大となる t の値は $t=28$ …答

【(2) 戦略３】

推測の域を出ませんが，本問は 1 次分数変換 $w=\dfrac{14(z-3)}{(1-i)z-7}$ を基に作られていると思います。

1 次分数変換は反転写像を表すという知識的側面が必要になるのですが，それを加味すれば直線の 1 次分数変換による像 (直線の反転による像) は「円または直線」になります。

今回は実軸上の z ($=t$ と与えられています) に対する 1 次分数変換ですから，実軸という直線の反転写像を考えると円であることが予想されます。

(2) 【解 3】

複素数 z に対して，$w=\dfrac{14(z-3)}{(1-i)z-7}$ で与えられる w を考える。

z が実軸の正の部分を動くときの点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡を考えればよい。

$w=\dfrac{14(z-3)}{(1-i)z-7}$ を z について解くと，$z=\dfrac{7w-42}{(1-i)w-14}$

ここで，z は正の実数であるので，$\begin{cases} z=\overline{z} \\ \dfrac{z+\overline{z}}{2}>0 \end{cases}$ である。

$z-\overline{z}=0$ より，$\dfrac{7w-42}{(w-14)-wi}-\dfrac{7\overline{w}-42}{\overline{w}-14+\overline{w}i}=0$

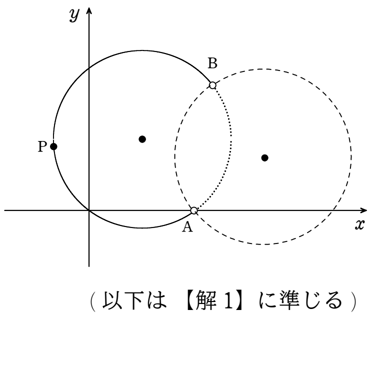
これを整理すると $|w-(3+4i)|^2=25$，すなわち $|w-(3+4i)|=5$

一方 $z+\overline{z}>0$ より $\dfrac{7w-42}{(w-14)-wi}+\dfrac{7\overline{w}-42}{\overline{w}-14+\overline{w}i}>0$

これを整理すると $|w-(10+3i)|^2>25$

以上から，点 $\mathrm{P}(w)$ の軌跡は $(3,4)$ を中心とした半径 5 の円のうち

$(10,3)$ を中心とした半径 5 の円の外側の部分であり，これを図示すると



(以下は 【解 1】に準じる)

【総括】

想像の域を超えませんが，出題者の頭の中には【解３】の反転写像があったのだろうと思われます。

ただし，決して【解 3】のような解答ができずとも， 試験場では【解 1】のように素直に進めていければ問題はありません。

適宜「幾何的な見方」「座標的な見方」「ベクトル的な見方」「複素数平面的な見方」を切り替えながら進めていく力が必要になりました。

もちろん，上記の様々な視点をどこまで適用するかによって，様々な別解が生じることにはなります。自分の解答と見比べて，「ここの部分は $\boxed{\text{解答}}$ でいうここの部分に該当するな」ということを確認しておいてください。

幾何，座標，ベクトル，複素数平面

この４分野は相互横断的に使いこなせるように訓練しておきましょう。