

素数の各桁の数を係数にもつ2次方程式

3桁の素数  $p$  の百の位の数字を  $a$  , 十の位の数字を  $b$  , 一の位の数字を  $c$  とする。

このとき2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  は整数解をもたないことを証明せよ。

< '77 名古屋大 >

【戦略1】

否定的な命題なので、背理法という路線はとりたいところです。

$ax^2+bx+c=0$  が  $x=m$  という整数解をもつと仮定します。

もし、この2次方程式に整数解があるとするならば、その整数解は負の整数解であることは明らかです。

つまり、 $m < 0$  であることは分かります。

次に、 $am^2+bm+c=0$  と代入した式から何を見出すかですが、 $a, b, c$  が1桁の自然数という部分がどこかで効いてくるだろうということは身構えておきたいです。

まず目につくのは  $c = -m(am+b)$  という積の形であることです。

3桁の素数  $p$  の1の位である  $c$  としてありえるのは

$$c = 1, 3, 7, 9$$

ですから、積の形から約数を拾っていくことが考えられます。

ここでは変に策に拘らずに腕力で押し切りたいと思います。

【解1】

素数  $p$  を  $p=100a+10b+c$  と表したとき、

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が整数解 } x=m \text{ (} m : \text{整数) をもつ}$$

と仮定する。

このとき、 $am^2+bm+c=0$  であり、 $c = -m(am+b) \dots \textcircled{1}$

また、 $m \geq 0$  と仮定すると、 $am^2+bm+c > 0$  となってしまう不合理。

ゆえに、 $m < 0$  である。

3桁の素数  $p$  の1の位である  $c$  としてありえるのは

$$c = 1, 3, 7, 9$$

また、 $b=0$  とすると、題意の2次方程式は

$$ax^2+c=0$$

となり、 $a > 0, c > 0$  を考えると、実数解をもたない。

そこで、以下は  $b$  は1桁の自然数として考える。

(i)  $c=1$  のとき ①より  $-m(am+b)=1$

$m$  は1の負の約数なので、 $m=-1$  で、このとき  $b-a=1$

これを満たす1桁の自然数  $a, b$  は

$$(a, b) = (1, 2), (2, 3), \dots, (8, 9)$$

ゆえに、 $p=121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891$

これら  $p$  の値は

$$p = 11^2, 3 \cdot 7 \cdot 11, 11 \cdot 31, 11 \cdot 41, 11 \cdot 51, 11 \cdot 61, 11 \cdot 71, 11 \cdot 81$$

となり、すべて素数とならず、不合理。

(ii)  $c=3$  のとき ①より  $-m(am+b)=3$

$m$  は3の負の約数なので、 $m=-1$  または  $m=-3$

(ii-1)  $m=-1$  のとき

$b-a=3$  で、これを満たす自然数  $a, b$  は

$$(a, b) = (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)$$

ゆえに、 $p=143, 253, 363, 473, 583, 693$

これら  $p$  の値は

$$p = 11 \cdot 13, 11 \cdot 23, 11 \cdot 33, 11 \cdot 43, 11 \cdot 53, 11 \cdot 63$$

となり、すべて素数とならず、不合理。

(ii-2)  $m=-3$  のとき

$-3a+b=1$  , すなわち  $b=3a+1$  で、これを満たす1桁の自然数  $a, b$  は  $(a, b) = (1, 4), (2, 7)$

ゆえに、 $p=143 (=11 \cdot 13), 273 (=3 \cdot 91)$  となり素数とならず、不合理。

(iii)  $c=7$  のとき ①より  $-m(am+b)=7$

$m$  は7の負の約数なので、 $m=-1, -7$

(iii-1)  $m=-1$  のとき

$b-a=7$  で、これを満たす1桁の自然数  $a, b$  は

$$(a, b) = (1, 8), (2, 9)$$

$p=187 (=11 \cdot 17), 297 (=3 \cdot 99)$  となり素数とならず、不合理。

(iii-2)  $m=-7$  のとき

$-7a+b=1$  , すなわち  $b=7a+1$  で、これを満たす1桁の自然数  $a, b$  は  $(a, b) = (1, 8)$

このとき  $p=187 (=11 \cdot 17)$  となり素数とならず、不合理。

(iv)  $c=9$  のとき ①より  $-m(am+b)=9$

$m$  は 9 の負の約数なので,  $m=-1, -3, -9$

(iv-1)  $m=-1$  のとき

$b-a=9$  でこれを満たす 1 桁の自然数  $a, b$  は存在しない。

(iv-2)  $m=-3$  のとき

$-3a+b=3$ , すなわち  $b=3a+3$  で, これを満たす 1 桁の自然数  $a, b$  の組は  $(a, b)=(1, 6), (2, 9)$

ゆえに,  $p=169 (=13^2), 299 (=13 \cdot 23)$  で, 素数とならず, 不合理。

(iv-3)  $m=-9$  のとき

$-9a+b=1$ , すなわち  $b=9a+1$  で, これを満たす 1 桁の自然数  $a, b$  の組は存在しない。

以上から, 素数  $p (=100a+10b+c)$  に対して, 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

が整数解をもつことはない。

### 【戦略 2】

$f(x)=ax^2+bx+c$  とします。

$f(m)=0$  から,  $c=-m(am+b)$  となり, 【戦略 1】では約数拾いに走りましたが, 茨の道であることは想像がつかます。(突破できなくはなかったですが)

そこで,  $c$  を消去してあらためて  $f(x)=ax^2+bx-m(am+b)$  と見ます。

ここで因数定理から  $f(x)=(x-m)\{ax+(am+b)\}$  と因数分解できるところに注目したいところです。

今回の素数  $p$  は  $p=100a+10b+c$  ですから,  $p=f(10)$  です。

$f(x)$  が因数分解されている(すなわち積の形で表せている)わけですから

$p=f(10)=(10-m)\{(10+m)a+b\}$  が (2 以上の整数)  $\times$  (2 以上の整数) と表されていれば合成数ということになり矛盾します。

$m < 0$  だということは最初のあたりでも比較的容易に見抜けるといえますから,  $10-m$  が 2 以上の整数になるというのは余裕で示せると思います。

問題は  $10+m$  ですが  $c=-m(am+b)$  より,  $m$  は  $c$  の約数です。

1 桁の  $c$  の約数なので, 当然  $m$  は 1 桁であることが言え, 解決しそうです。

### 【解 2】

素数  $p$  を  $p=100a+10b+c$  と表したとき,

$$ax^2+bx+c=0 \text{ が整数解 } x=m \text{ (} m: \text{整数) をもつ}$$

と仮定する。

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ とおく。}$$

$$f(m)=0 \text{ より, } am^2+bm+c=0 \text{ であり, } c=-m(am+b) \dots \text{①}$$

$$\text{ゆえに, } f(x)=ax^2+bx-m(am+b) \dots \text{②}$$

また, 因数定理, 及び②から,

$$f(x)=(x-m)\{ax+(am+b)\}$$

と因数分解できる。

これより,

$$p=f(10) \\ = (10-m)\{(10+m)a+b\} \dots (*)$$

$b=0$  が許されない理由は【解 1】を参照してください。

ここで,  $a, b, c$  は 1 桁の自然数であるため,  $f(x)=0$  が整数解をもつとしたら, それは負の整数である。

①から,  $-(am+b)=\frac{c}{m}$  であり, 左辺は整数なので右辺も整数。

ゆえに,  $m$  は 1 桁の自然数  $c$  の負の約数である。

つまり,  $m=-1, -2, \dots, -9$  のいずれかである。

これより,  $10-m, (10+m)a+b$  はともに 2 以上の整数である。

よって, (\*) から  $p$  は 2 以上の整数の積の形で表せ, 合成数ということになり,  $p$  が素数であることに矛盾する。

以上から, 題意は示された。

### 【総括】

問題の主張が, 本格的なことを言っており, 難問の匂いを嗅ぎ取れたと思います。試験場においては深入りすると危険なタイプの問題でしょう。

$c$  が所詮 1 桁であることから【解 1】では目についた特徴(積の形)を活かす形で約数拾いに走りました。

【解 2】では  $p=f(10)$  であること,  $f(x)$  が因数分解されることから

$$p \text{ って合成数になってしまわないか?}$$

と睨んだ戦略です。

問題の主張は面白いし, 考えがいがある良問ですね。

限られた時間しかない試験問題としては賛否両論あるでしょうが。

最高次の係数(頭)  
定数項(尻)  
に注意して因数分解します。