3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものを全て求めよ。

＜ '05 東京大 ＞

【戦略】

方針的には $a(a-1)=2^4\cdot 5^4\cdot M$ と因数分解をして「約数拾い」が目につきます。

M は一般の自然数であるため完全に約数を拾うことはできませんが，素因数 2，5 についてをふり分けることはできるでしょう。

まず，a が奇数という条件から，素因数 2 はすべて $a-1$ がもつことになります。

次に，a，$a-1$ が連続 2 整数であり，互いに素であることから素因数 5 についてもどちらかにかたまることに気が付きたいです。

$a-1$ はすでに 2^4 という素因数をもっているので，さらに 5^4 までもつと $a-1=10000N$ となってしまい，$3\leqq a\leqq 9999$ に反してしまいます。

このことから $\begin{cases} a=5^4K \\ a-1=2^4L \end{cases}$ **と表せることになり，**

$$625K-16L=1$$

という不定方程式を考えることになります。

この後の一手としては「特殊解」を見つけて辺々を引くという 1 次不定方程式の基本方針が目につくでしょうか。

特殊解として $K=1$，$L=39$ があり，それを利用して「一般解」を求めると

$$K=16m+1,\ L=625m+39\ (m\text{ は整数})$$

を得ます。

$a=625K$ で $3\leqq a\leqq 9999$ でしたから，この K は範囲が限られています。

割り算すれば $K=1，3，5，\cdots，15$ と即座に分かりますから，先ほどの一般解 $K=16m+1$ から，K を 16 で割った余りが 1 であることも併せて考えれば $K=1$ となり，解決です。

【解答】

$a^2-a=a(a-1)$ が $10000(=2^4\cdot 5^4)$ で割り切れるので，

$$a(a-1)=2^4\cdot 5^4\cdot M\ (M\text{ は自然数})$$

と表せる。

a は奇数なので，$a-1$ は 2^4 の倍数 …①

a，$a-1$ は連続 2 整数より，互いに素であることから，この 2 つは同時に 5 の倍数にはならない。

したがって a が 5^4 の倍数であるか $a-1$ が 5^4 の倍数であるかどちらかである。

$a-1$ が 5^4 の倍数であると仮定すると，①より

$$a-1=2^4\cdot 5^4\cdot N\ (N\text{ は自然数})$$

すなわち $a=(10000\text{ の倍数})+1$ となり，$3\leqq a\leqq 9999$ ということに反する。

ゆえに a が 5^4 の倍数である …②

①，② より $\begin{cases} a=5^4\cdot K=625K \\ a-1=2^4\cdot L=16L \end{cases}$ （K は奇数，L は自然数）と表せる。

この 2 式より $625K=16L+1$ となる。

$$\begin{cases} 625K-16L=1 & \cdots ③ \\ 625\cdot 1-16\cdot 39=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

③−④ より $625(K-1)-16(L-39)=0$，すなわち

$$625(K-1)=16(L-39)$$

$625(=5^4)$ と $16(=2^4)$ は互いに素なので

$$\begin{cases} K-1=16m \\ L-39=625m \end{cases}\ (m\text{ は整数})$$

特に，$K=16m+1$ であることから，K は 16 で割って 1 余る。

$a=625K$ で，$3\leqq a\leqq 9999$ ゆえ，$3\leqq 625K\leqq 9999$

これを満たす奇数 K は $K=1，3，5，\cdots，15$

このうち 16 で割って 1 余るのは $K=1$ のみ

ゆえに，$a=625$ …答

【戦略 2】

$625K=16L+1$ **を得てから以降ですが，**(整数)=(分数) **の形を狙っていくことも有力方針です。**

すると，$L=\dfrac{625K-1}{16}$ **となり，左辺が整数なので，右辺も整数となり，**

$625K-1$ **は** 16 **の倍数 ということが言えます。**

ただ，数が大きいので，$L=\dfrac{(16\cdot 39+1)K-1}{16}=39K+\dfrac{K-1}{16}$

として，$L-39K=\dfrac{K-1}{16}$ **という形で**(整数)=(分数) **と見ると**

$K-1$ **が** 16 **の倍数となり，**K **は** 15 **以下の奇数ですから** $K=1$ **と特定され解決します。**

【解 2】部分的別解

＜ $625K=16L+1$ を得てから ＞

$$L=\frac{625K-1}{16}$$

$$=\frac{(16\cdot 39+1)K-1}{16}$$

$$=39K+\frac{K-1}{16}$$

よって，$L-39K=\dfrac{K-1}{16}$ で左辺は整数なので，右辺も整数。

ゆえに $K-1$ は 16 の倍数 …(*)

一方 $a=625K$ で $3\leqq a\leqq 9999$ を考えると，これを満たす奇数 K は

$$K=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 15$$

ゆえに $K-1=0,\ 2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 14$

(*) より $K-1=0$，すなわち $K=1$となり，$a=625$ …答

【戦略 3】

本質的には【解 2】と同じことですが，合同式で表現すれば非常にすっきりと簡潔に解決できます。

$\begin{cases} a=625K \\ a-1=16L \end{cases}$ **ですが，**$a=16L+1\equiv 1 \pmod{16}$ **です。**

$a=625K\equiv K \pmod{16}$ （ $\because\ 625\equiv 1 \pmod{16}$ ）

これより，$K\equiv 1 \pmod{16}$ **を得ます。**

$3\leqq a\leqq 9999$ **から 奇数** K **は** $K=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 15$ **に限られますから**

即 $K=1$ **となり，解決です。**

【解 3】部分的別解

$\begin{cases} a=625K \\ a-1=16L \end{cases}$ （K は正の奇数，L は自然数） 以降

$a=16L+1\equiv 1 \pmod{16}$

一方，$625\equiv 1 \pmod{16}$ より，$a=625K\equiv K \pmod{16}$

ゆえに，$K\equiv 1 \pmod{16}$ …(☆)

条件 $3\leqq a\leqq 9999$ より $3\leqq 625K\leqq 9999$ で，これを満たす奇数 K は

$$K=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 15\ \cdots(★)$$

(☆)，(★) より，$K=1$ を得て，$a=625$ …答

【総括】

「積の形からの約数拾い」という定番の問題の中に、 a , $a-1$ が連続 2 整数という「この問題ならではの特殊性」が潜んでおり，それを見落とさないことが最初の山場でしょう。

その山場をクリアーし， $\begin{cases} a=625K \\ a-1=16L \end{cases}$ と得られた後は様々な「味付け」が考えられます。

オーソドックスに $625K-16L=1$ という 1 次不定方程式を解きにいくのもありますし，【解 2】のように $(\text{整数})=(\text{分数})$ の形から分母や分子を睨んでいくのも有力方針です。

【解 3】の合同式で表現するのも自然かつシンプルですね。

どんな特徴が最初に目についたかで，様々な解法が考えられるのは本問の面白いところです。

どの路線についても

$\begin{cases} \text{積の形からの約数拾い} \\ \text{余りで分類} \\ \text{評価する(範囲を絞る)} \end{cases}$ という基本手法 がちらほら出入りしています。

これについては常に意識することが大切です。

あまり一気に食すと消化不良を起こすかもしれませんから，まずは一つ一つの解法をしっかりと自分のものにできているかを確認してもらえたらと思います。