数列 $\{a_n\}$ があって，$a_1=1$，$a_2=2$ であり，連続する 3 項 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} は n が奇数のとき等比数列をなし，n が偶数のとき等差数列をなす。

(1)　a_n を求めよ。

(2)　$\sum_{k=1}^{2n} a_k$ を求めよ。

＜ ’86 一橋大　’05 京都薬科大 ＞

【戦略】

前 2 項の情報から次の項が特定されるという構図ですからある意味漸化式的な数列の定まり方をしますが，ルールが凝ったルールですから機械的な処理でどうこうできる範疇ではないですね。

原点に立ち返り，原始的に実験をしてみると

奇数番目が平方数

偶数番目が連続 2 整数の積

と予想できますから，それを証明すればよいでしょう。

もちろん前 2 項の情報から次の項が特定するという流れで定まっていく数列ですから，証明の手法は数学的帰納法ということになります。

(2) は (1) ができれば特に問題ない $\sum$ 計算です。

解答

(1)　この数列 $\{a_n\}$ を a_1 から書き出すと

$$1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 16,\ 20,\ 25,\ \cdots$$

これより $m=1,\ 2,\ \cdots$ として

$$\begin{cases} a_{2m-1}=m^2 \\ a_{2m}=m(m+1) \end{cases} \cdots (*)$$

と予想できる。これを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$m=1$ のとき $a_1=1$，$a_2=2$ より，$(*)$ は正しい。

(ii)　$m=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots$ ）のとき $\begin{cases} a_{2k-1}=k^2 \\ a_{2k}=k(k+1) \end{cases}$ が成り立つと仮定する。

このとき

a_{2k-1}，a_{2k}，a_{2k+1} は等比数列をなすので

公比 は $\dfrac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$ ですね。

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_{2k}\times\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} \\ &= k(k+1)\times\frac{k(k+1)}{k^2} \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

等比中項を使ってもいいですよ。

また，a_{2k}，a_{2k+1}，a_{2k+2} は等差数列をなすので

公差は $a_{2k+1}-a_{2k}$ ですね。

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= a_{2k+1}+(a_{2k+1}-a_{2k}) \\ &= 2a_{2k+1}-a_{2k} \\ &= 2(k+1)^2-k(k+1) \\ &= (k+1)\{2(k+1)-k\} \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

等差中項を使ってもいいですよ。

以上から $m=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上から $m=1,\ 2,\ \cdots$ として $\begin{cases} a_{2m-1}=m^2 \\ a_{2m}=m(m+1) \end{cases}$ が成立する。

$a_{2m-1}=m^2$ において，$n=2m-1$ のときは $m=\dfrac{n+1}{2}$ だから

$$a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$a_{2m}=m(m+1)$ において，$n=2m$ のときは $m=\dfrac{n}{2}$ だから

$$a_n=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

したがって，

$$a_n=\begin{cases} \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 & (\ n \text{ が奇数のとき}\ ) \\ \dfrac{n(n+2)}{4} & (\ n \text{ が偶数のとき}\ ) \end{cases} \cdots \text{答}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_{2k} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$

$$\begin{aligned}
&= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\
&= \sum_{m=1}^{n} a_{2m-1} + \sum_{m=1}^{n} a_{2m} \\
&= \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m(m+1) \\
&= \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} (m^2 + m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)\{2(2n+1)+3\} \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(4n+5) \cdots \text{答}
\end{aligned}$$

【(1) 戦略２】

与えられた条件を式で翻訳すると

a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} **は等比数列なので，**

$$a_{2k} = \sqrt{a_{2k-1} a_{2k+1}} \cdots ①$$
$$(a_{2k+2} = \sqrt{a_{2k+1} a_{2k+3}} \cdots ①')$$

a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} **は等差数列なので**

$$a_{2k+1} = \frac{a_{2k} + a_{2k+2}}{2} \cdots ②$$

となります。
①，①′ が意味することは，
「偶数番目を奇数番目の項で表せる」
ということで，② にそれらを代入することで，奇数番目だけの漸化式を作ることができます。

あとは見やすさ重視で $b_k = \sqrt{a_{2k-1}}$ **などと置き直すと，見通しのよい漸化式が現れます。**

別解

帰納的に $a_n > 0$ であることに注意する。

$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} は等比数列なので，$a_{2k} = \sqrt{a_{2k-1} a_{2k+1}} \cdots ①$
$(a_{2k+2} = \sqrt{a_{2k+1} a_{2k+3}} \cdots ①')$

一方，a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} は等差数列なので $a_{2k+1} = \dfrac{a_{2k} + a_{2k+2}}{2} \cdots ②$

①，①′ を ② に代入して，$a_{2k+1} = \dfrac{\sqrt{a_{2k-1} a_{2k+1}} + \sqrt{a_{2k+1} a_{2k+3}}}{2}$

すなわち $2a_{2k+1} = \sqrt{a_{2k-1} a_{2k+1}} + \sqrt{a_{2k+1} a_{2k+3}}$

両辺 $\sqrt{a_{2k+1}}$ で割って，$2\sqrt{a_{2k+1}} = \sqrt{a_{2k-1}} + \sqrt{a_{2k+3}}$

$\sqrt{a_{2k-1}} = b_k$ とおくと，$2b_{k+1} = b_k + b_{k+2}$ であり，

$$b_{k+2} - b_{k+1} = b_{k+1} - b_k$$

すなわち，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

$b_1 = \sqrt{a_1} = 1$ ，$b_2 = \sqrt{a_3} = 2$ より，公差は 1 なので

$b_k = k$ であり，$\sqrt{a_{2k-1}} = k$ を得る。

したがって，$a_{2k-1} = k^2$

このとき，① より，
$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \sqrt{k^2(k+1)^2} \\
&= |k(k+1)| \\
&= k(k+1) \quad (\because k = 1, 2, \cdots)
\end{aligned}$$

$a_{2k-1} = k^2$ において，$n = 2k-1$ のときは $k = \dfrac{n+1}{2}$ だから

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$a_{2k} = k(k+1)$ において，$n = 2k$ のときは $k = \dfrac{n}{2}$ だから

$$a_n = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

したがって，$a_n = \begin{cases} \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{n(n+2)}{4} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \cdots \text{答}$

【総括】

日本語で書かれていますが，結局は 3 項間漸化式です。

実験→予想→裏付け

という流れに乗れば，漸化式との相性の良い帰納法で裏付けするのが自然な発想です。
とは言え，実験してみても中々気がつかなかった人も多いかと思います。

だからと言って諦めるのももったいないです。

例えば実験してみて，奇数番目だけ抜き出して階差数列を取ってみたりしても予想が立ち，そこから裏付けを取って結論まで辿りつくことも可能です。

解答 のような予想以外でも問題はないですが，予想は必ず裏付けをとることを忘れないで下さい。

また，別解 では等差中項，等比中項の関係式から，式変形によって一般項に辿り着きました。

「式をいじっていたら解けた」という偶然 別解 路線に乗っかったという人も多かれ少なかれいるだろうと思います。

偶然できたという人は，結論が合っているかどうかということに一喜一憂することなく，自分のとった解法に説明が付けられるようにする姿勢をもってほしいと思います。

「偶然解けた」という感想から「必然的に解けた」という感想が増えるようにしたいところです。