空間内にある半径 1 の球 (内部を含む) を B とする。直線 ℓ と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と ℓ の距離を求めよ。

(2) ℓ のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

＜ '14 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) は難関大受験生であれば「平面 Ver」を経験したことがあるのではないでしょうか。

二等辺三角形を真っ二つにして三平方の定理を用いる定番の処理でいけるはずです。

(2) はまずは回転軸である ℓ を座標軸に見立てます。

ここでは z 軸に見立てて考えます。

座標を設定するので，なるべく簡単になるように設定しますが，球 B の中心は (1) の結果から $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ と設定すればよいでしょう。

あとは，$z=k$ でまず切り，その断面が回転したときの通過領域を捉えていきます。

その際に注意するのは

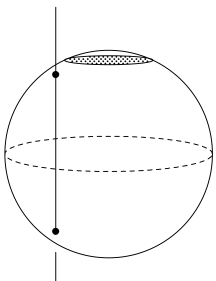
回転の中心からの最大距離と最小距離を捉える

ということです。

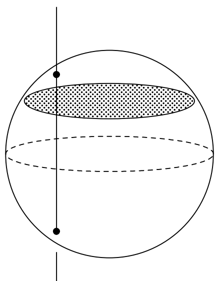
そこに意識が向いたのなら，

「上の方で切っている場合 ＜図 1＞」
「下の方で切っている場合 ＜図 2＞」

で回転の中心からの最大距離，最小距離が異なってくることに気が付きたいです。



＜図 1＞



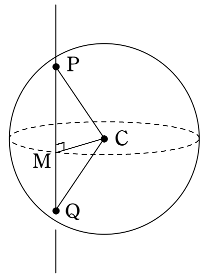
＜図 2＞

つまり，$z=k$ で切った断面が「回転軸をまたいでいるかどうか」という基準で場合分けが発生しますが，そこさえ落ち着いて処理してしまえば，やるべきことは一本道です。

【解答】

(1) B と ℓ との交点を P，Q とする。

また，B の中心を C とし，線分 PQ の中点を M とする。

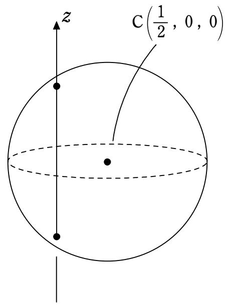


直角三角形 PMC に注目すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{MC}&=\sqrt{\mathrm{PC}^2-\mathrm{PM}^2}\\&=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

求める距離は MC と等しく，B の中心と ℓ の距離は $\frac{1}{2}$ … 答

(2) B の中心を $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ とし，直線 ℓ を z 軸に見立てることができる。



このとき，B を表す不等式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2\leqq 1$$

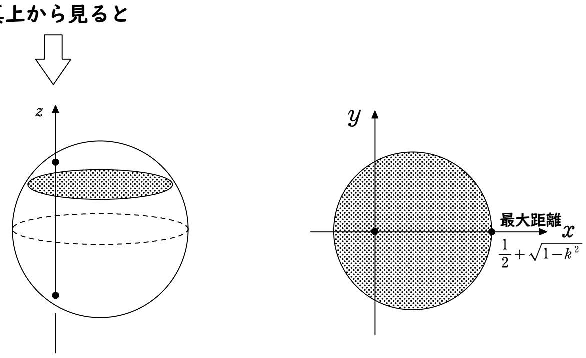
題意の回転体を $z=k$ ($0\leqq k\leqq 1$) で切った断面を考える。

注意
本来は $-1\leqq k\leqq 1$ の範囲だが，対称性より上半分を考えて後から 2 倍すれば十分

(i) $0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　　**P の z 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2\leqq 1$ の $z=k$ による切り口は $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq 1-k^2$

真上から見ると

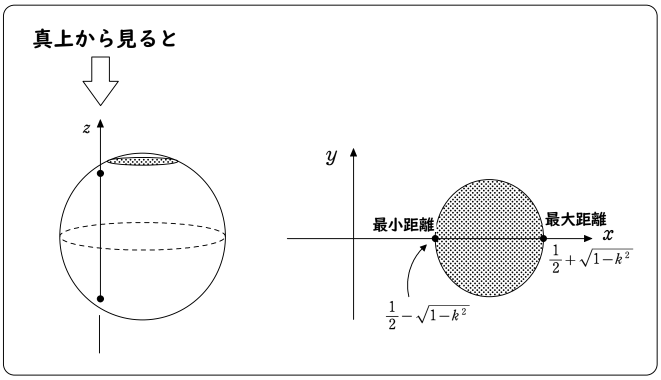


これを z 軸周りに回転させてできる通過領域の面積は

$$\pi\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right\}^2=\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)\pi$$

(ii) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq 1$ のとき

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2\leqq 1$ の $z=k$ による切り口は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq 1-k^2$



これを z 軸周りに回転させてできる通過領域の面積は

$$\pi\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right\}^2-\pi\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right\}^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

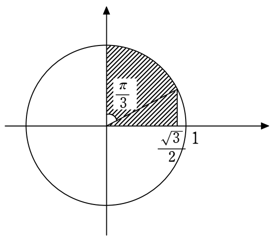
求める体積を V とすると，対称性から

$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)\pi\,dk+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\pi\sqrt{1-k^2}\,dk$$

円の一部

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-k^2}\,dk$ は

右図で塗った部分の面積であるから



$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-k^2}\,dk=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}\quad(=S_1\text{ とおく})$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-k^2}\,dk=\frac{\pi}{4}-S_1=\frac{1}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

したがって，$\displaystyle\frac{V}{2}=\left[\frac{5}{4}k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\pi S_1+2\pi\left(\frac{1}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$$=\frac{1}{3}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

ゆえに，$V=\dfrac{2}{3}\pi^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ …答

【総括】

空間座標の回転体では
- 全体像を捨てろ
- 切ってから回す
- 最大距離と最小距離を捉える

というのがポイントになります。

＜全体像について＞

たとえ全体像が「分かったとて…」の一言に尽きます。

そして本問を解き終わった後でさえ全体像はよく分かりません。

解く前から全体像について悩むのは見当違いな悩みです。

補足

よく分からないというのは言い過ぎで，よ～く考えると概形ぐらいは分かります。ただし，あくまで本問を解き終わった後でよく考えると分かるというニュアンスです。解き終わった後では断面を把握していますから。

下の方で切ると断面は円
上の方で切ると断面はドーナッツ

ですから，
下の方が詰まっていて，上の方が窪んでいるような形（カボチャみたいな形）になると思います。

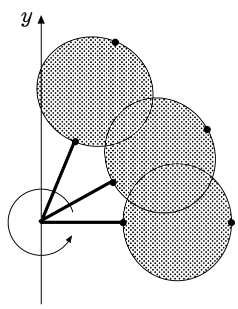
全体像がカボチャだと分かったところでカボチャの体積公式など知りません。

＜切ってから回す＞

先に回してしまうと訳が分からなくなります。

まず先に切ることを徹底してください。

＜最大距離と最小距離を捉える＞



のように，「取っ手をもって」回すと考えるとイメージしやすいと思います。

空間座標の回転体は「シナリオ」という面で困ることがないようにしておきたいところです。

特に現役生については，このあたりのトピックスまで手が回るかどうかは大きな差となります。