$0° < \theta < 90°$ とする。座標空間に 4 点

$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos 2\theta,\ \cos 3\theta)$，

$\mathrm{B}(\sin\theta,\ \sin 2\theta,\ \sin 3\theta)$，$\mathrm{C}(\sin\theta,\ -\sin 2\theta,\ \sin\theta)$

がある。

(1) ∠AOC と ∠BOC は，θ によらず一定であることを示せ。

(2) ∠AOB＝90° のとき，四面体 OABC の体積を求めよ。

＜ ’17 一橋大 ＞

【戦略 1】

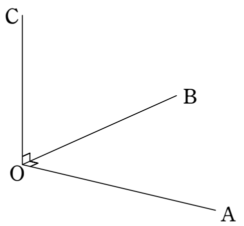
(1) **平面座標における角度の扱いは** $\begin{cases}\text{内積}\\ \tan\\ \text{複素数平面}\end{cases}$ **などがありますが，**

空間座標においては内積しか手立てがありません。

そこで，∠AOC に関係する $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，∠BOC に関係する $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を計算していきます。

幸いにして 0 という結果になりますから，解決です。

(2) **(1) の結果も踏まえると**



と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が互いに直交しています。

したがって，体積計算に必要な底面と高さをどこにするかについては選びたい放題です。

まぁ，△ABC を底面に選ばなければ，どこを選んでも体積は

$$\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

です。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はいつでも 0 なので，今回の四面体の形を決定づけているのは条件 ∠AOB＝90° からくる $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ です。

すなわち $\cos\theta\sin\theta+\cos 2\theta\sin 2\theta+\cos 3\theta\sin 3\theta=0$ を解いて θ が出れば，あとは具体的な計算になることになります。

もう少しほぐせば，$\sin 4\theta\,(2\cos 2\theta+1)=0$ となり，ここまでくれば手なりに進んでいくでしょう。

【解答】

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \cos 2\theta\\ \cos 3\theta\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \sin 2\theta\\ \sin 3\theta\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\sin 2\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\cos\theta\sin\theta-\cos 2\theta\sin 2\theta+\cos 3\theta\sin\theta$

$=\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\sin\theta\,(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$

$=\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta\cos^3\theta+2\sin^3\theta\cos\theta+4\sin\theta\cos^3\theta-3\sin\theta\cos\theta$

$=-2\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos^3\theta+2\sin^3\theta\cos\theta$

$=-2\sin\theta\cos\theta\,(1-\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=0$ （$\because$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$）

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sin^2\theta-\sin^2 2\theta+\sin 3\theta\sin\theta$

$=\sin^2\theta-(2\sin\theta\cos\theta)^2+\sin\theta\,(3\sin\theta-4\sin^3\theta)$

$=\sin^2\theta-4\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta)+3\sin^2\theta-4\sin^4\theta$

$=\sin^2\theta-4\sin^2\theta+4\sin^4\theta+3\sin^2\theta-4\sin^4\theta$

$=0$

以上から，∠AOB＝∠BOC＝90° (一定) であり，題意は示された。

(2) 条件から $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ なので

$$\cos\theta\sin\theta+\cos 2\theta\sin 2\theta+\cos 3\theta\sin 3\theta=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta+\frac{1}{2}\sin 6\theta=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta=0\ \cdots\ ①$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta&=2\sin\frac{2\theta+6\theta}{2}\cos\frac{2\theta-6\theta}{2}+\sin 4\theta\\&=2\sin 4\theta\cos 2\theta+\sin 4\theta\\&=\sin 4\theta\,(2\cos 2\theta+1)\end{aligned}$$

よって，① が成立するとき

$$\sin 4\theta=0 \quad \text{または} \quad \cos 2\theta=-\frac{1}{2}$$

(i)　$\sin 4\theta=0$ のとき，$0^\circ<4\theta<360^\circ$ なので，$4\theta=180^\circ$ で，$\theta=45^\circ$

このとき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

これより，$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(-1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$ に注意すると，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\right)\times|\vec{c}|=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdots\text{答}$$

(ii)　$\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$ のとき，$0^\circ<2\theta<180^\circ$ なので，$2\theta=120^\circ$ で，$\theta=60^\circ$

このとき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

これより，$|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$|\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$$

$\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$ に注意すると，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\right)\times|\vec{c}|=\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}\cdots\text{答}$$

参考　～外積について～

決して前面に押し出せる方針ではないので，答案にはできませんが，参考までに。

今回の $\vec{c}$ は外積 $\vec{a}\times\vec{b}$ によって作られています。

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ に対して，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\-(a_1b_3-a_3b_1)\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

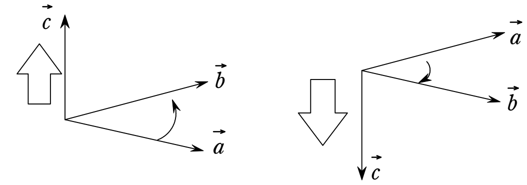
と定められるベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ の外積といいます。

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ で定まる $\vec{c}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ に直交します。

証明は $\vec{c}\cdot\vec{a}$，$\vec{c}\cdot\vec{b}$ をゴリゴリに計算していけば 0 になることが確かめられます。

向きは

$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に重ねる向きに回転させたとき「右ネジが進む方向」です。



したがって，$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{b}\times\vec{a}$ は異なることに注意してください。

さらに，$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\theta$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ がなす角）となります。

証明については $|\vec{c}|^2$ をゴリゴリに計算していくと

$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ を得ることができます。

$\vec{a}$，$\vec{b}$ によって作られる三角形の面積は

$$\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

でしたから，$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$（$\theta$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ がなす角）が従います。

－－－－－－－－－－－－－－**以下本問の話**－－－－－－－－－－－－－－－

今回の $\vec{c}$ は $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ によって作られています。

したがって，$\vec{c}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも直交し，(1) の結果が言えることになります。

また，(2) について，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\right)\times|\vec{c}| \\ &= \frac{1}{6}|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}| \end{aligned}$$

です。

条件，及び外積の性質から $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ=|\vec{a}||\vec{b}|$ ですから

$$V=\frac{1}{6}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$$

ということになります。

今，$\begin{cases} |\vec{a}|^2=\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cos^2 3\theta \\ |\vec{b}|^2=\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2 3\theta \end{cases}$ ですから，半角公式より

$$|\vec{a}|^2=\frac{3+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta}{2},\ |\vec{b}|^2=\frac{3-(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta)}{2}$$

です。

これを踏まえると，$\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta=0$ が成り立っているとき，

$\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta$ の値は出せるか？

という方向から攻め込めないかを検証します。

無理やりこの方向から攻めるとなるとマニアックな等式ですが

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\tan 2x\,(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)\ \cdots\ \boxed{注}$$

が成り立ちます。

これより

$$\sin 2\theta+\sin 4\theta+\sin 6\theta=\tan 4\theta\,(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta)$$

と言えます。

$\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta=0$ のときは $|\vec{a}|^2=\frac{3}{2}$，$|\vec{b}|^2=\frac{3}{2}$ なので，

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

です。

$\tan 4\theta=0$ のときは，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であることから，$0^\circ<4\theta<360^\circ$ で考えると，$4\theta=180^\circ$ で，$\theta=45^\circ$ を得ます。

このとき $\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta=-1$ ですから

$|\vec{a}|^2=\frac{3+(-1)}{2}=1$，$|\vec{b}|^2=\frac{3-(-1)}{2}=2$ で，

$$V=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}$$

となります。

$\boxed{注}$ について

$$\begin{aligned} \sin x+\sin 2x+\sin 3x &= 2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}+\sin 2x \\ &= 2\sin 2x\,\cos x+\sin 2x \\ &= \sin 2x\,(2\cos x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x+\cos 2x+\cos 3x &= 2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}+\cos 2x \\ &= 2\cos 2x\cos x+\cos 2x \\ &= \cos 2x\,(2\cos x+1) \end{aligned}$$

【総括】

空間座標における角度の扱いはベクトルの内積ぐらいしか手立てがありません。

(2) は素直に θ を求めて A，B，C の座標を計算した方がよいでしょう。

実際に $\boxed{注}$ の関係式の導出過程で

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\sin 2x\,(2\cos x+1)$$

が出てくるのであれば，$\sin 2x\,(2\cos x+1)=0$ としてしまった方が早いでしょう。

作問者が外積を用いて本問を作ったことは十中八九確かでしょう。

ただ，本問を解くにあたって，その外積が美味しくはたらいているかと言われると微妙だったと思います。

大学入試ではある意味そっちの方が望ましい？