多項式 $f(x)$ について，次の条件 (A)，(B)，(C) を考える。

(A) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ (B) $f(1-x)=f(x)$ (C) $f(1)=1$

(1) 条件 (A) を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。
(2) 条件 (A，(B)，(C) をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

＜ ’08 東北大 ＞

【戦略 1】

(1) **まずは条件 (A) についてのみを考えることになります。**
$f(x)$ を n 次式と設定し，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ とおきます。

この状況で $x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を計算してやると

$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a_n}{x^{n-4}}+\dfrac{a_{n-1}}{x^{n-3}}+\cdots\cdots+a_1x^3+a_0x^4$ **を得ることができます。**

これが $f(x)$ という多項式にならなければならないため，分母に x が残ってはいけません。

このことから，$n-4\geqq 1$，すなわち $n\geqq 5$ だとマズイことになり，$n\leqq 4$ を得ることになります。

(2) **(1) の結果から $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおくことができます。**

あらためて条件 (A) について考えると $\begin{cases} a_0=a_4 \\ a_1=a_3 \end{cases}$ という条件を得るため，

係数が左右対称

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

ということになります。（相反多項式と言います。）

次に条件 (B) を翻訳していきます。

一番素直な捉え方としては $f(1-x)=f(x)$ が x についての恒等式と見ることでしょう。

そこで，$f(1-x)$ を計算して係数を比較する「係数比較法」で処理していきます。

【解 1】

(1) $f(x)$ が n 次式として

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$

とおく。

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left\{a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0\right\}$$
$$=\frac{a_n}{x^{n-4}}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-5}}+\cdots\cdots+a_1x^3+a_0x^4$$

$n\geqq 5$ だとこれは多項式とならないため，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ は成立しない。

これより，$n<5$，つまり $f(x)$ の次数は 4 以下である。

(2) (1) より $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおける。

このとき $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a_4}{x^4}+\dfrac{a_3}{x^3}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_1}{x}+a_0$

条件 (A) より

$$a_4+a_3x+a_2x^2+a_1x^3+a_0x^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

よって，$\begin{cases} a_0=a_4 \\ a_1=a_3 \end{cases}$

したがって，$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ と表せる。

ここで，条件 (B) より $f(1-x)=f(x)$ は x について恒等式である。

$f(1-x)=a_0(1-x)^4+a_1(1-x)^3+a_2(1-x)^2+a_1(1-x)+a_0$

$=a_0x^4-(4a_0+a_1)x^3+(6a_0+3a_1+a_2)x^2-(4a_0+4a_1+2a_2)x+(2a_0+2a_1+a_2)$

これが $f(x)$ と恒等式であるので

$$\begin{cases} -4a_0-a_1=a_1 \\ 6a_0+3a_1+a_2=a_2 \\ -4a_0-4a_1-2a_2=a_1 \\ 2a_0+2a_1+a_2=a_0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2a_0+a_1=0 \ \cdots ① \\ 4a_0+5a_1+2a_2=0 \ \cdots ② \\ a_0+2a_1+a_2=0 \ \cdots ③ \end{cases}$$

②－① によって ③ と同じ式が得られることから，

$$\begin{cases} 2a_0+a_1=0 \ \cdots ① \\ 4a_0+5a_1+2a_2=0 \ \cdots ② \end{cases}$$

① より $a_1=-2a_0$ で，これを ② に代入して $a_2=3a_0$ を得る

このとき，$f(x)=a_0x^4-2a_0x^3+3a_0x^2-2a_0x+a_0$ … ④

条件 (C) から $f(1)=1$ であるため，$a_0=1$ を得る。

これを ④ に代入し，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ … 答

【戦略 2】

恒等式 $f(1-x)=f(x)$ の処理方法としては「数値代入法」と呼ばれる手法もあります。

要するに $f(1-x)=f(x)$ が任意の x で成り立つのだから，特別好きな都合のよい x の値を代入しても成り立つことになるわけです。

そこで，条件 (B)，(C) をうまく絡めるために，条件 (B) において $x=1$ を代入してみると

$$f(0)=f(1)$$

となり，条件 (C) から，$f(0)=f(1)=1$ となります。

これにより，$f(0)=a_0=1$ を得るため，

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+1$$

という状況になります。

あと分からないのは a_1，a_2 という２文字です。

条件 (C) である $f(1)=1$ ということから，あと 1 つ条件があればいいということで，もう 1 回条件 (B) にある恒等式を用いていきます。

任意の x に対して $f(1-x)=f(x)$ なので，簡単なところで $x=2$ を代入して $f(-1)=f(2)$ ということを利用していきます。

ただし，任意の x の値に対してきちんと条件 (B) を満たしているかどうか（十分性の確認）をチェックすることを忘れないでください。

(2) 【解 2】

(1) より $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおける。

このとき $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a_4}{x^4}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_1}{x}+a_0$

条件 (A) より

$$a_4+a_3x+a_2x^2+a_1x^3+a_0x^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

よって，$\begin{cases} a_0=a_4 \\ a_1=a_3 \end{cases}$

したがって，$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ …(*) と表せる。

条件 (B) に $x=1$ を代入すると $f(0)=f(1)$

条件 (C) より $f(0)=1$ となるため，(*) から $a_0=1$

あらためて $f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+1$ …(**) と整理する。

条件 (B) に $x=2$ を代入すると $f(-1)=f(2)$

(**) から $a_2-2a_1+2=17+10a_1+4a_2$

これを整理すると $a_2+4a_1+5=0$ … ①

条件 (C) 及び (**) から $2a_1+a_2+2=1$，すなわち $2a_1+a_2+1=0$ …②

①，② より $a_1=-2$，$a_2=3$

よって，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ を得る。

この $f(x)$ は条件 (A)，(B)，(C) をすべて満たす。

$\therefore$ $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ … 答

【戦略３】

少し検証的な解答を考えてみたいと思います。

(A) **が意味するのは** $f(x)$ **が相反多項式**

$$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

ということです。

(B) **が意味することを考えてみます。**

$f(1-x)=f(x)$ **の** x **を** $x+\dfrac{1}{2}$ **とすると**

$$f\left(\frac{1}{2}-x\right)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$

が成立します。

つまり，(B) **が意味するのは**

$y=f(x)$ **のグラフ は** $x=\dfrac{1}{2}$ **について対称である**

ということです。

そこで，この対称軸を y **軸に重ねるように** x **軸方向に** $-\dfrac{1}{2}$ **だけ平行移動させてみます。**

つまり，$g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ **とおくと，**$y=g(x)$ **は** y **軸対称なので，4 次の偶関数ということになり，**

$$g(x)=ax^4+bx^2+c$$

と表すことができます。

これより，$f(x)=g\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+b\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+c$$
$$=ax^4-2ax^3+\left(\frac{3a}{2}+b\right)x^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)x+\frac{a}{16}+\frac{b}{4}+c$$

となります。

ここで，条件 (C) **に目を向けると，**$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=1$ **ということになり**

$\dfrac{a}{16}+\dfrac{b}{4}+c=1$ **を得ますから**

$$f(x)=ax^4-2ax^3+\left(\frac{3a}{2}+b\right)x^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)x+1$$

と変形できるわけです。

そして，これが相反多項式ということから $\begin{cases} a=1 \\ -2a=-\left(\dfrac{a}{2}+b\right) \end{cases}$ **という式を得て解決です。**

(2)　【解３】

(1) より $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ とおける。

このとき $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a_4}{x^4}+\dfrac{a_3}{x^3}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_1}{x}+a_0$

条件 (A) より

$$a_4+a_3x+a_2x^2+a_1x^3+a_0x^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

よって，$\begin{cases} a_0=a_4 \\ a_1=a_3 \end{cases}$

したがって，$f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ …(*) と表せる。

ここで，条件 (B) より，$f\left(1-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

すなわち $f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$ が成立する。

これは $y=f(x)$ のグラフが $x=\dfrac{1}{2}$ について対称であることを意味する。

そこで，$g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，$y=g(x)$ は y 軸対称であり，4 次の偶関数である。

ゆえに，$g(x)=ax^4+bx^2+c$ とおける。

すると，$f(x)=g\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$f(x)=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+b\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+c$$
$$=ax^4-2ax^3+\left(\frac{3a}{2}+b\right)x^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)x+\frac{a}{16}+\frac{b}{4}+c \quad \cdots ①$$

条件 (C) より，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(1)=1$ であるので

$$\frac{a}{16}+\frac{b}{4}+c=1 \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$f(x)=ax^4-2ax^3+\left(\frac{3a}{2}+b\right)x^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)x+1 \quad \cdots ③$$

条件 (A) が意味することは $f(x)$ の $\begin{cases} x^4 \text{ の係数と定数項が等しい} \\ x^3 \text{ の係数と } x \text{ の係数が等しい} \end{cases}$

ということであるから

$\begin{cases} a=1 \\ -2a=-\left(\dfrac{a}{2}+b\right) \end{cases}$ であり，これら 2 式から $a=1$，$b=\dfrac{3}{2}$

これを ③ に代入すれば

$$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1 \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

(1) は $f(x)$ を n 次式として設定して，与えられた条件を立式すれば，手なりに $n \geqq 5$ だとマズイことが見えると思います。

(2) は条件 (A) が $f(x)$ が相反多項式というものを表すという部分まではいけるでしょう。（相反多項式という言葉は知らなくても，式的特徴を掴むことはそこまで難しくはないと思います）

条件 (B) の扱い方がこの問題の山場でしょう。

【解 1】では $f(1-x)=f(x)$ が恒等式であることを用いて「係数比較法」で処理していきました。

【解 2】では $f(1-x)=f(x)$ という恒等式を「数値代入法」で処理していきました。
その際に気を付けるべきことは x に特殊な値を代入して出てきた $f(x)$ が代入した値以外のものに対してもちゃんと成立するかをチェックしなければいけないことです。

今回の $f(x)$ は

任意の x で $f(1-x)=f(x)$ が成立する
$\Longrightarrow$ 　$x=○$ で $f(1-x)=f(x)$ 成立する
$\Longrightarrow$ 　$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

という流れで出したものです。したがって

$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
$\Longrightarrow$ 　任意の x で $f(1-x)=f(x)$ が成立する

は検証しないと成り立つかどうか分かりません。

【解 3】は試験場での解答というよりは，検証的な解答です。

もし自分が試験場でこの問題と遭遇したら【解 1 】か【解 2 】で解くと思います。（実際，この問題を実践演習で扱うにあたり自分で解いたときはその順番で解きました。）

その後，式的なアプローチだけでなく，グラフ的なアプローチができないだろうかと考え，条件 (B) が $x=\dfrac{1}{2}$ に関する線対称性を主張していることを見出したことで発見した解答が【解 3】です。