(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

＜ '94 東京工業大 ＞

【戦略 1】

(1) は基本問題です。

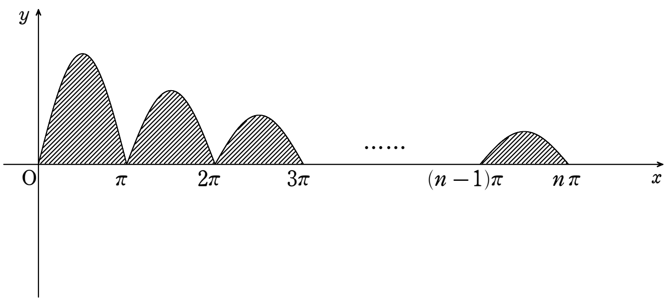
部分積分からの同形出現

$$\begin{cases}(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\\(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\end{cases}$$ **の辺々操作**

のいずれかによって導出します。

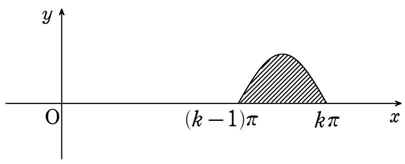
(2) は頻出定番の問題です。

今回の定積分が表す面積がどこかを図示してみると



のようになります。

そこで，「k 番目の山」



に注目し，$\displaystyle a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$　**とおきます。**

最終的に

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx+\cdots\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

と計算するという目論見のもと，a_k **を求めて** $\sum$ **計算する方針が立ちます。**

a_k **については絶対値の処理をどのようにするかがポイントになります。**

ここでは

積分区間を簡単にする置換積分

という方針で倒してみます。

【解 1】

(1)　$\begin{cases}(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\\(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\end{cases}$

辺々足すと，$(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)'=-2e^{-x}\sin x$

これより，$e^{-x}\sin x=-\dfrac{1}{2}(e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x)'$

ゆえに，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}$

$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\ \cdots 答$$

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として，$\displaystyle a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$　とおく。

$x-(k-1)\pi=t$　とおくと，$dx=dt$

x	$(k-1)\pi\ \to\ k\pi$
t	$0\ \to\ \pi$

$$a_k=\int_0^{\pi} e^{-(k-1)\pi-t}\,|\sin\{t+(k-1)\pi\}|\,dt$$
$$=(e^{-\pi})^{k-1}\int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt$$
$$=(e^{-\pi})^{k-1}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt\ （\because\ 積分区間\ 0\leqq t\leqq\pi\ で\ \sin t\geqq 0）$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)(e^{-\pi})^{k-1}\quad（\because\ (1)\ の結果）$$

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx+\cdots\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}$$

$\left(\text{注}：\textbf{初項}\ \dfrac{1}{2}(e^{-\pi}+1),\ \textbf{公比}\ e^{-\pi}\ \textbf{の等比数列の和}\right)$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\frac{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}{1-e^{-\pi}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\pi}}+1\right)}{1-\frac{1}{e^{\pi}}}$$

$$=\frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}-2}\ \cdots 答$$

【(2) 戦略 2】

$a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ **において，$|\sin x|$ の外れ方としては**

k **が偶数のとき** $|\sin x|=-\sin x$

k **が奇数のとき** $|\sin x|=\sin x$

です。

場合分けして処理するのも一つですが，もう少し省エネして

$(k-1)\pi\leqq x\leqq k\pi$ **では** $|\sin x|=(-1)^{k-1}\sin x$

と，1 つの式で表現できる工夫を思いつければしめたものです。

【(2) 解答 2】部分的別解

$a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ について

積分区間 $(k-1)\pi\leqq x\leqq k\pi$ において，$|\sin x|=(-1)^{k-1}\sin x$ であるため

$$
\begin{aligned}
a_k&=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}(-1)^{k-1}\sin x\,dx\\
&=(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx\\
&=(-1)^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\Big[e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}\\
&=(-1)^{k}\frac{1}{2}\left\{e^{-k\pi}\cos k\pi-e^{-(k-1)\pi}\cos(k-1)\pi\right\}\\
&=(-1)^{k}\frac{1}{2}\left\{(-1)^{k}e^{-k\pi}-e^{-(k-1)\pi}(-1)^{k-1}\right\}\\
&=(-1)^{k}\frac{1}{2}\left\{(-1)^{k}e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}(-1)^{k}\right\}\\
&=(-1)^{k}(-1)^{k}\frac{1}{2}\left\{e^{-k\pi}+e^{-(k-1)\pi}\right\}\\
&=\frac{1}{2}e^{-(k-1)\pi}\left\{e^{-\pi}+1\right\}\\
&=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)(e^{-\pi})^{k-1}
\end{aligned}
$$

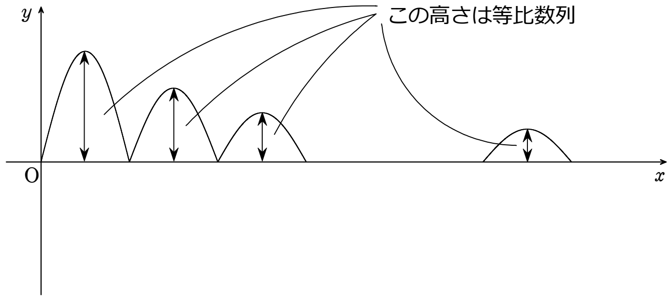
これより，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列

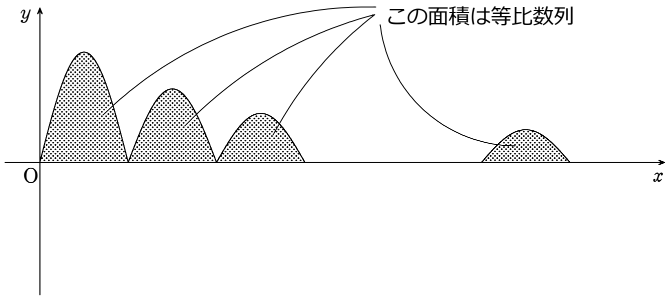
（以下 【解 1】に準じる ）

【総括】

減衰曲線を扱う問題で，定番の類といってよいでしょう。

減衰曲線では至る所に等比数列が現れます。





当然これらのことがよく聞かれます。

等比数列とはいえ，数値計算はそれなりに煩雑なので，結果が等比数列になると知っているだけでも精神的には落ち着くでしょう。

【解 1】の $x-(k-1)\pi=t$ という置換は経験がものをいいます。

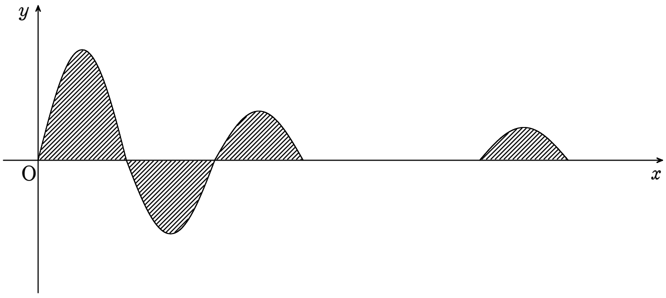
積分区間を簡単にするのが目的ですが，そのひずみとして

$\sin \boxed{}$　この中がグチャグチャになります。

しかし，周期性からすぐにキレイになるのでご安心ください。

【解 2】のように直接計算することも足腰を鍛えるという点では一度はやっておいても無駄ではないと思います。

$(-1)^{\bigcirc}$ を用いて符号を調整する工夫は本問以外にも使いどころがありますので，まだ自分のものとなっていない方は今後の糧にしてください。



「$y=e^{-x}\sin x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。」という問題文でも自ら $y=e^{-x}|\sin x|$ と絶対値をつけましょう。

区間によって上下が変わるのはやりづらいと思います。

普段絶対値は外したいと考える中，この減衰曲線に関しては途中まではむしろ絶対値を付けた方がよいという普段とは逆行する態度なので，最初はすんなりと手が進まないかもしれませんが，結果だけ覚えるのではなく，その態度をとる目的まできちんと理解していただければと思います。