次の問いに答えよ。

(1) $6(x-y)=xy$ を満たす自然数の組 x, y をすべて求めよ。

(2) $7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)$ を満たす自然数 x, y, z $(x\leqq y\leqq z)$ をすべて求めよ。

< '07 大分大 >

【戦略 1】

(1) は積の形から約数を拾うタイプに持ち込む典型的な形です。

手法自体も大切ですが，そうと判断できる目も大切です。

(2) は評価して範囲を絞り込むタイプです。

$x\leqq y\leqq z$ と問題文で指定がありますが，与えられた等式には対称性がありますから，これは言われなくても自分で設定したいところです。
(対称性は大小関係を導入する 1 つのシグナルです。)

$x\leqq y\leqq z$ を用いて与えられた等式の左辺なり右辺なりを評価していくことになります。

x が大きかったら y, z はそれ以上に大きいので，次数的に
$7(x+y+z)<2(xy+yz+zx)$ となってしまいそうだと考えられますから，
x はそんなに大きくないだろうと予測はたちます。

そこでよくある評価として「まるごと x にしてしまう」ということを考えてみると

$2(xy+yz+zx)\geqq 2(x\cdot x+x\cdot x+x\cdot x)$ **より** $7(x+y+z)\geqq 6x^2$ (**?**)

じゃあ $7(x+y+z)\geqq 7(x+x+x)$ **より** $2(xy+yz+zx)\geqq 21x$ (**?**)

と，前に進まない結論が得られます。

これを打開する方針としては，閃き一発ですが

$2(xy+yz+zx)\geqq 2(xy+xx+zx)$ **と一部分だけ評価することにより**

$7(x+y+z)\geqq 2x(x+y+z)$ **とすれば，$2x\leqq 7$ を得て一気に解決に向かいます。**

その後は (1) と同様，積の形から約数を拾うタイプになります。

【解 1】

(1) 与えられた等式は $xy-6x+6y=0$，すなわち

$$(x+6)(y-6)=-36 \cdots ①$$

と変形できる。

条件より x は自然数なので，$x+6>0$ であることから $y-6<0$

条件より y は自然数なので，$y=1, 2, 3, 4, 5$

つまり，$y-6=-5, -4, -3, -2, -1$

よって ① より

$$(x+6,\ y-6)=(9,\ -4),\ (12,\ -3),\ (18,\ -2),\ (36,\ -1)$$

これより，$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (6,\ 3),\ (12,\ 4),\ (30,\ 5)$ … 答

(2) x, y, z は $x\leqq y\leqq z$ を満たす自然数であるから，

$$2(xy+yz+zx)\geqq 2(xy+x\cdot x+zx)$$

与えられた等式を満たすとき

$7(x+y+z)\geqq 2(xy+x\cdot x+zx)$，すなわち $7(x+y+z)\geqq 2x(x+y+z)$

$x+y+z>0$ なので，$7\geqq 2x$ を満たす。

これを満たす自然数 x は $x=1, 2, 3$

(i) $x=1$ のとき

$$7(1+y+z)=2(yz+y+z) \iff 2yz-5y-5z-7=0$$

$$\iff yz-\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}z-\frac{7}{2}=0$$

$$\iff \left(y-\frac{5}{2}\right)\left(z-\frac{5}{2}\right)=\frac{39}{4}$$

$$\iff 2\left(y-\frac{5}{2}\right)2\left(z-\frac{5}{2}\right)=39$$

$$\iff (2y-5)(2z-5)=39$$

$1\leqq y\leqq z$ であるので，$-3\leqq 2y-5\leqq 2z-5$ に注意すると

$(2y-5,\ 2z-5)=(1,\ 39),\ (3,\ 13)$，すなわち

$$(y,\ z)=(3,\ 22),\ (4,\ 9)$$

(ii)　$x=2$ のとき

$7(2+y+z)=2(yz+2y+2z) \iff 2yz-3y-3z=14$

(i) と同様の考え方でこれを変形をすると $(2y-3)(2z-3)=37$

$2\leqq y\leqq z$ であるので，$1\leqq 2y-3\leqq 2z-3$ であることに注意すると

$(2y-3,\ 2z-3)=(1,\ 37)$，すなわち $(y,\ z)=(2,\ 20)$

(iii)　$x=3$ のとき

$7(3+y+z)=2(yz+3y+3z) \iff 2yz-y-z=21$

(i) と同様の考え方でこれを変形すると $(2y-1)(2z-1)=43$

$3\leqq y\leqq z$ であるので，$5\leqq 2y-1\leqq 2z-1$ であることに注意すると

$(2y-1)(2z-1)=43$ を満たす 5 以上の整数 $2y-1$，$2z-1$ の組は存在しない。

以上 (i)，(ii)，(iii) から求める自然数 x，y，z $(x\leqq y\leqq z)$ の組は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 22),\ (1,\ 4,\ 9),\ (2,\ 2,\ 20)\ \cdots\ \text{答}$$

【(2) 戦略２】

【解 1】のような評価が思いつかなかった場合，どうするかについて考えていきます。

まず，x はそんなに大きくないだろうということは予見できていてほしいです。

そこで，小さいほうから実験してみます。

$x=1$ のときは

$$
\begin{aligned}
7(1+y+z)=2(yz+y+z) &\iff 2yz-5y-5z-7=0\\
&\iff yz-\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}z-\frac{7}{2}=0\\
&\iff \left(y-\frac{5}{2}\right)\left(z-\frac{5}{2}\right)=\frac{39}{4}\\
&\iff 2\left(y-\frac{5}{2}\right)2\left(z-\frac{5}{2}\right)=39\\
&\iff (2y-5)(2z-5)=39
\end{aligned}
$$

となり，解けるなと判断できます。

$x=2$ のときも同様に $(2y-3)(2z-3)=37$ を得て解けると判断できます。

ここで一つ疑問です。

「この実験どこまでやればいいの？」

今分かったことは，$x=\bigcirc$ と決めたら，$(\quad)(\quad)=\square$ という見慣れた形に持ち込めるということが分かりました。

そこで，一般に $x=k$ と固定してこの不定方程式を考えてみます。

$7(k+y+z)=2(ky+yz+kz)$

$\iff 2yz+(2k-7)y+(2k-7)z-7k=0$

$\iff yz+\dfrac{2k-7}{2}y+\dfrac{2k-7}{2}z-\dfrac{7k}{2}=0$

$\iff \left(y+\dfrac{2k-7}{2}\right)\left(z+\dfrac{2k-7}{2}\right)=\dfrac{(2k-7)^2+14k}{4}$

$\iff (2y+2k-7)(2z+2k-7)=(2k-7)^2+14k$

目論見によれば，この k はそんなに大きくないはずです。

よって，$k\leqq y\leqq z$ を用いて

$$(2k+2k-7)(2k+2k-7)\leqq(2y+2k-7)(2z+2k-7)$$

と評価してやると，$(4k-7)^2\leqq(2k-7)^2+14k$ で，これを整理すると

$2k^2-7k\leqq 0$，すなわち $k(2k-7)\leqq 0$ を得るため，$0\leqq k\leqq\dfrac{7}{2}$ と絞り込めます。

記述でまとめるときは k を使わずに x のままで記述したいと思います。

【⑵ 解 2】(部分的別解)

$7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)$ を整理すると

$$(2y+2x-7)(2z+2x-7)=4x^2-14x+49 \cdots (*)$$

$x \leqq y \leqq z$ であることから

$$(2x+2x-7)(2x+2x-7) \leqq (2y+2x-7)(2z+2x-7)$$

すなわち $(4x-7)^2 \leqq (2y+2x-7)(2z+2x-7)$

$(*)$ より，$(4x-7)^2 \leqq 4x^2-14x+49$ であり，これを整理すると

$2x^2-7x \leqq 0$，すなわち $x(2x-7) \leqq 0$

よって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{2}$ であり，これを満たす自然数 x は $x=1，2，3$

(以下【解 1】に準じる)

【戦略 3】

閃き一発ですが，対称性を活かした式変形から一気に $1 \leqq x \leqq 3$ とすることも可能です。

【⑵ 解 3】(部分的別解)

$7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)$ は

$2xy+2yz+2zx-7x-7y-7z=0$，すなわち

$$z(2x-7)+x(2y-7)+y(2z-7)=0 \cdots (★)$$

と変形できる。

$x \geqq 4$ と仮定すると，$x \leqq y \leqq z$ も考えると，$y \geqq 4$，$z \geqq 4$

このとき，(★) の左辺は正の値となり (★) を満たすことはない。

ゆえに，$x=1，2，3$

(以下【解 1】に準じる)

【総括】

まずは「この形はできる」という判断ができる「目」を養う必要があります。

⑵ については【解 1】のような閃き一発系の評価ができればそれ以上言うことはありません。

評価というのは正直に言うと「センス」が関わってきます。

例えば 1<○ の ○ に何を入れるかといったら人によるところが大きいでしょう。

つまり「絶対的な正解がない」ということです。

ある意味自由だからこそ，何をしてよいのかが分からずに困る人が多いのでしょう。

特効薬があればいいのですが，

栄養をつけて免疫力を高める

（→「良質な演習を通じて（自力）地力を高める」と読み替えてください)

という対処療法で頑張りましょう。

ただ，本問の場合，【戦略２】のように実験してみてとっかかりを掴むという「粘り勝ち」も可能です。

「ただでは転ばんぞ」という姿勢は大切です。