次の問いに答えよ。

(1) x が正の数のとき，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2) p，q，r が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき

$$p^2+q^2+r^2 \geqq \frac{1}{3}$$

を示せ。

(3) a，b，c が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。

＜ ’07 大阪大 ＞

【戦略 1】

(1) **$\log$ の服を着たものと裸の x が入り混じっている不等式ですから微分を使って証明することになります。**

もちろん絶対値がついたままでは微分できないので場合分けをして絶対値を外して処理します。

(2) **差をとれば $p^2+q^2+r^2-\dfrac{1}{3}$ です。**

扱う式が 2 次であることを考えると，$(\quad)^2$ が証明の根拠としての決め手となりそうです。

そう考えると，2 次をフルで活かすために条件 $p+q+r=1$ を

$$p^2+q^2+r^2-\frac{1}{3}(p+q+r)^2$$

とみる形で進めていきます。

これを整理すると $\dfrac{2}{3}(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$

となり，結局 $p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp \geqq 0$ を示すことになります。

これは

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp=\frac{1}{2}\{(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\}$$

と見るのが常套手段ですが，この見方は経験値によるでしょう。

(3) **(1) の不等式を活かそうと思うと，むしろ絶対値は付いていてほしいですね。**

$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}=\dfrac{ab}{b-a}(\log b-\log a)$ **なので**

$$\frac{ab}{|b-a|}\left|\log\frac{b}{a}\right|=\begin{cases}\dfrac{ab}{b-a}(\log b-\log a) & (0<a<b \text{ のとき}) \\ \dfrac{ab}{a-b}(\log a-\log b) & (0<b<a \text{ のとき})\end{cases}$$

なのですが，よくよく見てみるとこの 2 つは $0<a<b$ のときも $0<b<a$ のときも全く同じです。

つまり，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}=\dfrac{ab}{|b-a|}\left|\log\dfrac{b}{a}\right|$ と絶対値をつけても構わないことになります。

これによって (1) の活用が見込め，

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}=\frac{ab}{|b-a|}\left|\log\frac{b}{a}\right| \leqq \frac{ab}{|b-a|}\cdot\frac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$$

$$=\frac{ab}{|b-a|}\cdot\frac{|b-a|}{\sqrt{ab}}$$

$$=\sqrt{ab}$$

となり，同様に $\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b} \leqq \sqrt{bc}$，$\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \sqrt{ca}$ であるので

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

を得ることになります。

もちろん，この後は $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \dfrac{1}{3}$ を目指すことが考えられます。

これについては今度は (2) を使いたくなりますね。

条件 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ のとき (2) から $a+b+c \geqq \dfrac{1}{3}$ が言えます。

これを活用しようと思うと

2 乗展開のクロスタームと見ます。

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(a+b+c)\}$$

と見るのが自然です。

【解 1】

(1) (i) $x \geqq 1$ のとき

示すべき不等式は $\log x \leqq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ …①

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\log x$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\geqq 0$$

これより，$x \geqq 1$ の範囲で $f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x) \geqq f(1)=0$$

よって，① が示された。

(ii) $0<x \leqq 1$ のとき

示すべき不等式は $-\log x \leqq -\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

すなわち $\log x \geqq \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ …②

$g(x)=\log x-\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ とおく。

$g(x)=-f(x)$ なので，

$$g'(x)=-f'(x)$$
$$=-\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\leqq 0$$

$g(x)$ は $0<x \leqq 1$ の範囲で単調減少であるから

$$g(x) \geqq g(1)=0$$

よって，② が示された。

(i)，(ii) より $|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ が示された。

(2) $p^2+q^2+r^2-\dfrac{1}{3}=p^2+q^2+r^2-\dfrac{1}{3}(p+q+r)^2$

（ ∵ 条件 $p+q+r=1$ ）

$$=\frac{2}{3}(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$$
$$=\frac{1}{3}(2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp)$$
$$=\frac{1}{3}\{(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\}$$
$$\geqq 0$$

ゆえに，$p+q+r=1$ のとき，$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ が成立する。

(3) $\dfrac{ab}{b-a}$ と $\log\dfrac{b}{a}$（$=\log b-\log a$）は同符号であるので

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}=\frac{ab}{|b-a|}\left|\log\frac{b}{a}\right|$$

(1) より $\left|\log\dfrac{b}{a}\right| \leqq \dfrac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$ であることから

$$\frac{ab}{|b-a|}\left|\log\frac{b}{a}\right| \leqq \frac{ab}{|b-a|}\cdot\frac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$$
$$=\frac{ab}{|b-a|}\cdot\frac{|b-a|}{\sqrt{ab}}$$
$$=\sqrt{ab}$$

よって，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a} \leqq \sqrt{ab}$ …③

同様に

$$\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b} \leqq \sqrt{bc} \quad \cdots ④$$

$$\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \sqrt{ca} \quad \cdots ⑤$$

③＋④＋⑤ より

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \quad \cdots (*)$$

ここで，

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(a+b+c)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{1-(a+b+c)\}$$

(2) より，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ であるとき，$a+b+c \geqq \dfrac{1}{3}$

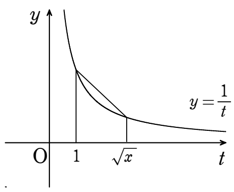
よって，$\dfrac{1}{2}\{1-(a+b+c)\} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \leqq \dfrac{1}{3}$ …(**)

(*)，(**) より $\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}+\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b}+\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \dfrac{1}{3}$

が成立する。

【戦略 2】(1) の (i) について　〜方針のみ〜



というグラフを利用して面積に注目すれば

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t}dt < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)(\sqrt{x}-1)$$

$$\log\sqrt{x} < \frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2}\log x < \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

$$\log x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

という面積比較でも証明できます。

【戦略 3】(1) の (ii) について

$x\geqq 1$ のときを示した後，$0<x\leqq 1$ のときについては $x=\dfrac{1}{t}\ (t\geqq 1)$ とおくと，示すべき不等式は

$$\left|\log\frac{1}{t}\right| \leqq \frac{\left|\frac{1}{t}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{t}}}$$ **，すなわち** $$|\log t| \leqq \frac{|t-1|}{\sqrt{t}}\quad (t\geqq 1)$$

となり，$x\geqq 1$ のときに示した形となります。

【(1) の部分的別解】

(ii)　$0<x\leqq 1$ のとき

$x=\dfrac{1}{t}\ (t\geqq 1)$ とおけるので，示すべき不等式は

$$\left|\log\frac{1}{t}\right| \leqq \frac{\left|\frac{1}{t}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{t}}}$$ ，すなわち $$|\log t| \leqq \frac{|t-1|}{\sqrt{t}}\quad (t\geqq 1)$$

これは (i) で示した。

【戦略 4】(2) について　〜方針のみ〜

閃き一発ですが，コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2) \geqq (ap+bq+cr)^2$$

において，$a=b=c=1$ とすると

$$3(p^2+q^2+r^2) \geqq (p+q+r)^2$$

を得ます。

条件 $p+q+r=1$ から，$3(p^2+q^2+r^2)\geqq 1$ を得て，$p^2+q^2+r^2\geqq\dfrac{1}{3}$ が示されます。

【戦略 5】(2) について

$r=1-p-q$ と文字消去して，ゴリゴリに計算するという方針も緊張した試験場であれば十分考えられます。

【(2) の別解】

$$\begin{aligned}p^2+q^2+r^2 &= p^2+q^2+(1-p-q)^2 \quad (\because\ \text{条件より}\ r=1-p-q)\\ &= 2p^2+2(q-1)p+2q^2-2q+1\\ &= 2\left(p+\frac{q-1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\\ &\geqq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

文字の整理は 1 文字中心

となり，示された。

【戦略 6】(3) の部分的別解　〜方針のみ〜

形的に (1) の利用を考えれば，むしろ絶対値はついていてほしいわけです。

そこで，三角不等式 $|x+y|\leqq|x|+|y|$，及び $x\leqq|x|$ を用いてラフに

$$\begin{aligned}&\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c}\\ &\leqq\left|\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c}\right|\\ &\leqq\frac{ab}{|b-a|}\left|\log\frac{b}{a}\right|+\frac{bc}{|c-b|}\left|\log\frac{c}{b}\right|+\frac{ca}{|a-c|}\left|\log\frac{a}{c}\right|\\ &\leqq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\end{aligned}$$

ここの橋渡しは【解 1】を参照して下さい。

とつなげることもできます。

【総括】

(1)，(2) は煮るなり焼くなり刺身にするなり … という感じの問題です。工夫を抜きにしても十分完答できる範疇と言ってよいでしょう。

反面 (3) は誘導である (1)，(2) を活用しきれたかどうかで差が付いたと思います。特別な何かがあるわけではありませんが，大切な手法や考え方は沢山詰まっていると言えましょう。