x，y は実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+2y^2=1$ のとき，$x+4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ とする。xy の最大値を求めよ。
　また，そのときの x，y の値も求めよ。

＜(1) '18 福島大　(2) '16 立命館大＞

【戦略】

従属 2 変数ということで，基本的には文字消去を狙っていくのが基本です。

そういった意味で，(1) は y^2 が消去できます。

文字消去する際に大切なのは

「遺産の整理」

という言葉です。

$y^2=\dfrac{1-x^2}{2}$ **として y^2 は消えてしまいます（お亡くなりになります）が，**

$y^2\geqq 0$ **という条件（遺産）により**

$\dfrac{1-x^2}{2}\geqq 0$，**すなわち** $-1\leqq x\leqq 1$ **という条件が生き残る x 側に相続されます。**

(2) は単純な文字消去が困難です。

一番応用性が高い考え方の 1 つは「逆像法」です。

今回を例にとると

xy **って 1 になれる？** $\longrightarrow$ $x^2+y^2=1$ **を満たしつつ** $xy=1$ **になれる？**

$\longrightarrow$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=1 \end{cases}$ **という連立方程式が** $x>0$，$y>0$ **という解をもつ？**

という問題に帰着します。

この場合 $y=\dfrac{1}{x}$（x **は 0 でないのは明らかです**）**として**

$x^2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=1$，**すなわち** $x^4-x^2+1=0$ **を解くと** $x^2=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ **となり話になりません。**

つまり，$xy=1$ は今回の場合，実現不可能です

xy **って** $\dfrac{1}{3}$ **になれる？** $\longrightarrow$ $x^2+y^2=1$ **を満たしつつ** $xy=\dfrac{1}{3}$ **になれる？**

$\longrightarrow$ $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ **という連立方程式が** $x>0$，$y>0$ **という解をもつ？**

同様に y を文字消去して整理すると $9x^4-9x^2+1=0$

$x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{6}$ **となり，これを満たす実数 $x>0$ は（汚いけど）存在はします。**

つまり， $xy=\dfrac{1}{3}$ **は実現可能です。**

このように

$xy=$○ **になれる？** $xy=$□ **になれる？** …

と「しらみつぶしに」やっていけば，最大値や最小値は求まるでしょう。

ただ，現実的に本当にしらみつぶすのは大変ですし，キリがありません。

そこで

$xy=k$ **になれる？　なれるとしたらどんな k ？**

と考えます。

このように「文字の力を借りてしらみつぶす」のです。

結局は $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=k \end{cases}$ **を同時に満たす $x>0$，$y>0$ なる実数 x，y が**

「存在するか？」という問題に帰着することになります。

この考え方を「逆像法」といいます。（名前の由来は【総括】で）

【解 1】

(1)　条件 $x^2+2y^2=1$ より，$y^2=\dfrac{1-x^2}{2}$

y は条件より実数なので，$y^2\geqq 0$ であるため，$\dfrac{1-x^2}{2}\geqq 0$

これより，$-1\leqq x\leqq 1$ である。

さて，

$$\begin{aligned} x+4y^2 &= x+4\cdot\frac{1-x^2}{2} \\ &= x+2(1-x^2) \\ &= -2x^2+x+2 \\ &= -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8} \end{aligned}$$

$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲では

$x=\dfrac{1}{4}$ $\left(このとき，y=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right)$ で最大値 $\dfrac{17}{8}$

$x=-1$（このとき $y=0$）で最小値 -1

以上から，求める最大値と最小値は

$$\begin{cases} (x, y)=\left(\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right) \text{ のとき最大値 } \dfrac{17}{8} \\ (x, y)=(-1, 0) \text{ のとき最小値 } -1 \end{cases} \quad \cdots 答$$

(2) $xy=k$ とおく。

$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots ① \\ xy=k & \cdots ② \end{cases}$ を同時に満たす $x\,(>0)$, $y\,(>0)$ が存在するための k の条件を求める。

$x>0$, $y>0$ のとき，② より，$y=\dfrac{k}{x}$

① に代入すると $x^2+\dfrac{k^2}{x^2}=1$

整理すると $x^4-x^2+k^2=0$

これが $x>0$ の範囲に実数解を少なくとも 1 つもてばよい。

$t=x^2$ とおくと，$t^2-t+k^2=0$ が $t>0$ となる解を少なくとも 1 つもてばよい。

$f(t)=t^2-t+k^2\left(=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+k^2-\dfrac{1}{4}\right)$ とおく。

$Y=f(t)$ のグラフについて 軸は $t=\dfrac{1}{2}>0$

$f(0)=k^2>0$（$\because$ $xy>0$）

に注意すると，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqq 0$ となればよい。

注：$f(t)=0$ **の判別式を** D **として** $D\geqq 0$ **としても同じこと**

よって，$k^2-\dfrac{1}{4}\leqq 0$，すなわち $-\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq \dfrac{1}{2}$

$k>0$ に注意すれば，$0<k\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

$k=\dfrac{1}{2}$ となるとき，$x^4-x^2+\dfrac{1}{4}=0$ を満たす $x\,(>0)$ は $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このとき $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上から $xy\,(=k)$ がとり得る値の最大値は $\dfrac{1}{2}$ …答

【(2) 戦略 2】

文字消去が困難であるとき，逆像法の他の有力方針としては

「絶対不等式の活用」

ということも考えられます。
※ 絶対不等式とは文字通り「絶対に成り立つ不等式」のことです。

ここでは「和と積」に関する絶対不等式である相加平均・相乗平均の関係を考えてみます。

【(2) 解 2】

条件 $x>0$, $y>0$ より，$x^2>0$, $y^2>0$

相加平均・相乗平均の関係から

$$x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2y^2}$$

条件 $x^2+y^2=1$，及び $\sqrt{x^2y^2}=|xy|=xy$（$\because$ $x>0$, $y>0$）に注意して

$1\geqq 2xy$，すなわち $xy\leqq\dfrac{1}{2}$ を得る。

等号成立は $x^2=y^2\left(=\dfrac{1}{2}\right)$ $x>0$, $y>0$ に注意すると $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

以上から xy の最大値は $\dfrac{1}{2}$ …答

【(2) 戦略 3】

今回限りの方針ですが，$x^2+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ を満たす x，y は

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

と表現できます。

そうなると，三角関数の最大・最小に帰着します。

【(2) 解 3】

$x^2+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ を満たす x，y は

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

と表せる。

このとき，

$$\begin{aligned} xy &= \cos\theta\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2\theta<\pi$ であるから，$0<\sin 2\theta \leqq 1$ をとり得る。

これより，xy がとり得る値の範囲は

$$0<xy\leqq\frac{1}{2}$$

※ $xy=\dfrac{1}{2}$ となるとき $\sin 2\theta=1$ で，$0<2\theta<\pi$ では $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$

すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ であり，$x=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに，求める xy の最大値は $\dfrac{1}{2}$ …答

【総括】

従属 2 変数の最大最小を扱う際にはまずは「文字消去」を狙うのが第 1 の方針でしょう。

文字消去する際は「遺産の整理」という言葉は心に刻んでおいていただければと思います。
生前もっていた条件（遺産）を，後に生き残る文字に引き継がせてください。

(2) のように簡単に文字消去できないケースが問題です。

【解 2】で扱った絶対不等式の活用が一番早く簡潔に終わる可能性が高いのですが，半面「それが見えればいいけどね」と言わざるを得ません。

相加平均・相乗平均の関係

$x_k>0$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）のとき $x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

コーシーシュワルツの不等式

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2}$$

三角不等式

$$|X+Y| \leqq |X|+|Y|$$

あたりは，その不等式の形や特徴をおさえつつ，狙う機会を探してみましょう。

愚直に考えると【解 1】で扱った「逆像法」（しらみつぶしの考え方）が応用性が高く，他のさまざまな問題にも活用できる考え方です。

【解 3】の方針は $x^2+y^2=1$ だからできる方針です。
「三角関数」を用いて θ のみの式に 1 変数化しているので，ある意味文字消去と言えなくもないですが 。

まとめると

従属 2 変数関数の最大最小問題に対する有力方針

＜方針 1＞：文字消去

＜方針 2＞：(文字消去が困難なとき) 逆像法（しらみつぶしの考え方)

＜方針 3＞：絶対不等式の活用

となります。

補足

$xy=k$ とおいて，$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\dfrac{k}{x} \end{cases}$ を同時に満たす $(x,\ y)$ が存在するか？

という逆像法ですが，図形的に考えると

$$\begin{cases} \text{円}\ x^2+y^2=1 \\ \text{双曲線}\ y=\dfrac{k}{x} \end{cases} \text{が第１象限に交点をもつか}$$

という問題となります。

$=k$ とおいて図形的に捉え，共有点をもつように k の範囲を求める

という態度の問題は単元学習を終えた受験生であれば，恐らくどこかで経験していると思います。

この手の問題は「線形計画法」などと呼ばれています。

そう考えると，線形計画法という方針も逆像法の考え方が息づいているということができるでしょう。

注意

「線形性 (linearity) 」という言葉は直線 (line) 的な性質という意味で，線形計画法も，本来は１次式に関する最適化問題に対して用いるのですが，

「$=k$ とおいて，図形的に捉えて交点をもつように k の範囲を求める問題全般」を線形計画法と一括りで呼んでいる人が多いです。

私もいちいち説明が面倒くさいので線形計画法と呼んでしまいますが，呼ぶたびに違和感を覚えます。でも面倒くさいので呼んじゃいます。

＜逆像法の名前の由来＞

本来は

「x，y が決まって，xy という値が決まる」

という流れです。

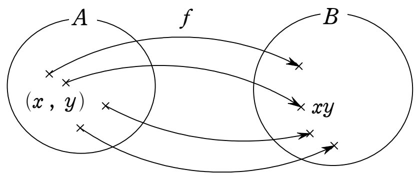
今回の話を例にとり

$$A=\{(x,\ y)\mid x>0,\ y>0,\ x^2+y^2=1\}$$
$$B=\{xy\mid (x,\ y)\in A\}$$

$$f : A\to B\ ((x,\ y)\longmapsto xy)$$

という，集合 A の要素から集合 B の要素に対応させる写像 f を考えます。

このように集合 A の各元 $(x,\ y)$ に対して f を施して得られる xy という値の集合 B を f による「像」といいます。



この像を作る基となる集合 (ここでいうと集合 A) を「逆像」と言います。

今回の考え方は $xy=1$ になれる？ $xy=2$ になれる？ …… というように「 xy という値を与えたときに，$(x,\ y)$ という組 (逆像)が存在するか」というものでした。

逆像が存在するかどうかに注目する方法なので，逆像法と呼ばれています。