式の個性

平面上の点 $(a\,,\,b)$ は円 $x^2+y^2-100=0$ 上を動き，点 $(c\,,\,d)$ は円 $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ 上を動くものとする。

(1)　$ac+bd=0$ を満たす $(a\,,\,b)$ と $(c\,,\,d)$ の例を一組あげよ。

(2)　$ac+bd$ の最大値を求めよ。

＜ '10 埼玉大 ＞

【戦略 1】

$ac+bd$ という設定に「作為」を感じることができたのであれば，

点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$，点 $\mathrm{Q}(c\,,\,d)$ に対して，$ac+bd$ という値は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=ac+bd$$

と，内積を表していることに気が付きたいところです。

すると，(1) はその内積の値が 0 ということは当然直交しているということに目が向きます。

(1) は一組「見つければよい」ということなので，出来る限り簡単なもので考えたいところです。

そこで今回の円の 1 つ $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ の中心 $(3\,,\,4)$ を通る

直線 $y=\dfrac{4}{3}x$ とそれに直交する $y=-\dfrac{3}{4}x$

に注目して探していきます。

(2) は内積の最大値なのですが，内積を出来る限り大きくしようと思うと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta\ \ (\theta \text{ は } \overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \text{ のなす角})$$

であることから，基本的には θ が小さいほうがよい (すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を重ねるようにした方がよい) ということをイメージしたいところです。（もちろんなす角だけでなく，内積は大きさにも影響を受けますからそんなに単純ではありませんが)

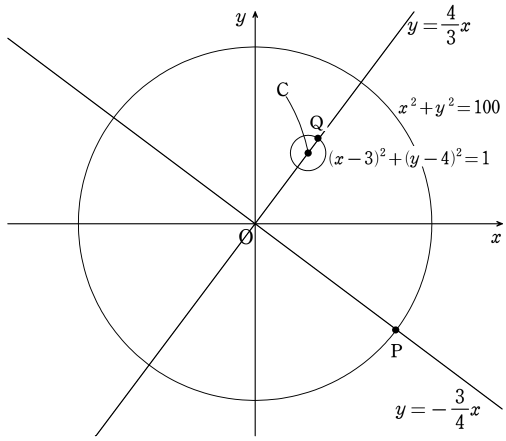
【解 1】

(1)　円 C_1 : $x^2+y^2=100$ …①

　　円 C_2 : $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ …②

とし，円 C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$，円 C_2 上を動く点 $\mathrm{Q}(c\,,\,d)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=ac+bd$ であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ となる $(a\,,\,b)$，$(c\,,\,d)$ の例を一組あげればよい。



(図 1)

円 C_2 の中心を C とし，図 1 のように P，Q を定めると $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ である。

点 P については $y=-\dfrac{3}{4}x$ と ① 式を連立すると

$x^2+\dfrac{9}{16}x^2=100$ で，これより $x^2=64$ で，図 1 から $x>0$ であるため

$x=8$ で，このとき $y=-6$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{6}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{18}{5}\\[2mm]\dfrac{24}{5}\end{pmatrix}$

以上から求める 点 $(a\,,\,b)$，$(c\,,\,d)$ の一例としては

$$(8\,,\,-6)\,,\ \left(\frac{18}{5}\,,\,\frac{24}{5}\right)\ \cdots\text{答}$$

(2)　(1) で定めた Q を Q_0 とする。($\mathrm{Q}_0\left(\dfrac{18}{5}\,,\,\dfrac{24}{5}\right)$)

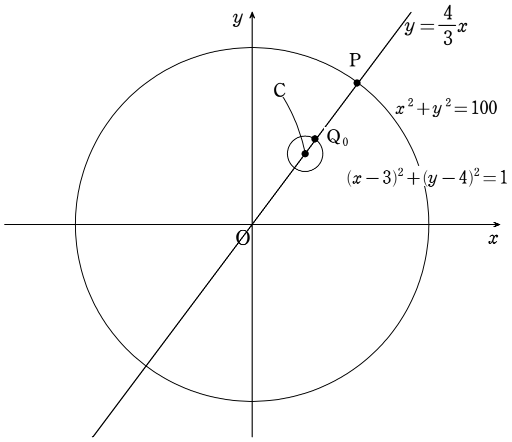
円 C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(a\,,\,b)$，円 C_2 上を動く点 $\mathrm{Q}(c\,,\,d)$ について

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと

$$\begin{aligned}ac+bd&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta\\&\leqq 10\,|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\\&\leqq 10\,|\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}|\\&=60\end{aligned}$$

等号成立は $\theta=0$ かつ $\mathrm{Q}\left(\dfrac{18}{5},\ \dfrac{24}{5}\right)$ のとき

すなわち $\mathrm{P}(6,\ 8)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{18}{5},\ \dfrac{24}{5}\right)$ のとき（（図２）参照）



（図２）

よって，求める最大値は 60 … 答

【戦略２】

$ac+bd$ を内積と捉えられなかった場合，２円をパラメータ表示することにより三角関数の話にすることもできます。

$(c,\ d)$ については第１象限にあるため，$ac+bd=0$ となるためには，a，b は異符号である必要があります。

そのことを踏まえて，$(a,\ b)$ については「見つければよい」というラフな考えに基づいて，出来る限り簡単なもので考えるとなると $(8,\ -6)$ あたりで考えてみたくなります。

(2) は円 $x^2+y^2=100$ 上の点 $(a,\ b)$ に対して $\begin{cases} a=10\cos\alpha \\ b=10\sin\alpha \end{cases}$

円 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上の点 $(c,\ d)$ に対して $\begin{cases} c=\cos\beta+3 \\ d=\sin\beta+4 \end{cases}$

とおきます。

その後は，$ac+bd$ については α，β に関する独立２変数関数になりますので予選決勝法の考え方で仕留めていきます。

【解２】

(1)　$a=8$，$b=-6$ とし，円 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上の点 $(c,\ d)$ は

$$\begin{cases} c=\cos\theta+3 \\ d=\sin\theta+4 \end{cases}$$

と表すことができる。

このとき，$ac+bd=8(\cos\theta+3)-6(\sin\theta+4)$
$\qquad\qquad=8\cos\theta-6\sin\theta$

で，$ac+bd=0$ のとき，$6\sin\theta-8\cos\theta=0$ となるため

$$10\sin(\theta-\gamma)=0 \quad \left(\text{ただし，}\gamma\text{ は}\begin{cases} \sin\gamma=\dfrac{4}{5} \\ \cos\gamma=\dfrac{3}{5} \end{cases}\text{を満たす}\right)$$

とにかく見つければいいんです。

これを満たす θ の一例として $\theta=\gamma$ のときを考えればよい

このとき，$\begin{cases} c=\cos\gamma+3=\dfrac{3}{5}+3=\dfrac{18}{5} \\ d=\sin\gamma+4=\dfrac{4}{5}+4=\dfrac{24}{5} \end{cases}$

よって，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の一例として

$$(8,\ -6),\ \left(\frac{18}{5},\ \frac{24}{5}\right)\text{ がある。… 答}$$

(2)　円 $x^2+y^2=100$ 上の点 $(a,\ b)$ に対して

$$\begin{cases} a=10\cos\alpha \\ b=10\sin\alpha \end{cases}$$

敢えて範囲を定めずグルグル動いてもらいます

円 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上の点 $(c,\ d)$ に対して

$$\begin{cases} c=\cos\beta+3 \\ d=\sin\beta+4 \end{cases}$$

とおける。

$$\begin{aligned} ac+bd&=10\cos\alpha(\cos\beta+3)+10\sin\alpha(\sin\beta+4) \\ &=10(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+40\sin\alpha+30\cos\alpha \\ &=10\cos(\alpha-\beta)+50\sin(\alpha+\delta) \end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし，}\delta\text{ は}\begin{cases} \sin\delta=\dfrac{3}{5} \\ \cos\delta=\dfrac{4}{5} \end{cases}\text{を満たす定角}\right)$$

α を固定して β だけ動かすとき，$\beta=\alpha$ とするのが最善で
そのときの最大値は

$$10\cdot1+50\sin(\alpha+\delta)=10+50\sin(\alpha+\delta)$$

次に α の固定を外して α を動かすと，α の定義域は実数全体であることから，

$$10+50\sin(\alpha+\delta)\leqq10+50\cdot1=60$$

以上より，$ac+bd\leqq60$ でこの等号は成立し得る。

ゆえに，求める最大値は 60 … 答

【総括】

$(a\,,\ b)$，$(c\,,\ d)$ がそれぞれ円 $x^2+y^2=100$，$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上の点であるということの翻訳を

$$a^2+b^2=100\,,\ (c-3)^2+(d-4)^2=1$$

として，ここから $ac+bd$ を目指すという方針を取る人は筋が悪いと言わざるを得ません。

点 $(a\,,\ b)$，$(c\,,\ d)$ がこれらの円上の点であることの翻訳方法は他にもあり，それが三角関数を用いてパラメータ表示するという方法です。
それが【解２】のベースになります。

しかし，出題者の期待している解法は恐らく【解１】の方でしょう。

【解２】を期待しているのであれば，$ac+bd$ という形にこだわる必要はないからです。

逆に言えば，【解２】の方針は $ac+bd$ 以外の形だったとしても通じやすく，他の問題でも応用がききやすいと言えるでしょう。

式のもつ形や個性を見落とさないように意識することは普段の学習において大切なことです。

ただし，緊張した試験場では必ずしも出題者の作為に気が付くことができるとは限りません。

そんなときにリカバリーできるかどうかについては，「量」だけでなく「質」も追求した学習を積み重ねるしかありません。