半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある。

(1) $AB^2+BC^2+CA^2>8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ。

(2) $AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのは どのような場合か。

＜ '02 京都大 ＞

**【戦略 1】**

**まずは図形を扱う分野の中でも比較的機械的な分野であるベクトルを道具として進めていく方針を考えてみたいと思います。**

**2 次元の話であれば**

**始点を揃えろ，基底で表せ。**

**というセオリーにしたがって，何か主役となるベクトル（基底）を 2 本用意して，登場人物をその基底で表しにいくのが普通です。**

**ただ，今回は外心絡みの話で，少し例外的です。**

**$\triangle ABC$ の外心を O としたとき，**

**$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ というように設定して進めることが多いです。**

**問題文を見る限り A，B，C には対称性（この場合対等性と言った方がよいかもしれません）があります。**

**これが何を意味しているかというと**

**例えば $\angle A$ が鋭角であることを示したら**

**「同じ要領で $\angle B$，$\angle C$ が鋭角であることを示せる」**

**ということを意味します。**

**$\angle A$ が鋭角であることを示す方法と，$\angle B$ が鋭角であることを示す方法が全然違うやり方なわけありません。**

**そこで，$\angle A$ が鋭角であることを示す方向にエネルギーを注ぎます。**

**皆さんは「$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \angle A$ が直角」ということは常識だと思いますが，これが常識であるのならば同時に**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0 \Leftrightarrow \angle A \text{ が鋭角} \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0 \Leftrightarrow \angle A \text{ が鈍角} \end{cases}$$

**も併せて使えるようにしてください。**
**もちろん根拠は $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ と見たときの $\cos\theta$ の符号です。**

**よって今回は $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}>0$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$ を目指します。**

**(2) は不等式証明なので，差をとって考えればよいのですが，最後のものの見方が多少難しいかもしれません。**

**普段の不等式の証明において最後の「よって $\geqq 0$ 」という 1 行前に何が書いてあったか … を考えると一気に視界が広がる（はず）**

【解 1】ベクトル

この円の中心 O に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする。

A，B，C が半径が 1 の円周上の点なので $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ … ①

$$\begin{aligned} AB^2+BC^2+CA^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2 \\ &= |\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2+2|\vec{c}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) \\ &= 6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) \ (\because ①) \end{aligned}$$

(1) 条件より $6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})>8$

これより，$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}<-1$ … ②

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a}) \\ &= \vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a})+1 \ (\because ①) \\ &> \vec{b}\cdot\vec{c}-(-1-\vec{b}\cdot\vec{c})+1 \ (\because ②) \\ &= 2(\vec{b}\cdot\vec{c}+1) \\ &= 2(|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta_1+1) \ (\theta_1 \text{ は } \vec{b},\vec{c} \text{ のなす角}) \\ &= 2(\cos\theta_1+1) \ (\because ①) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ で，$\angle BAC$ は鋭角

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} &= (\vec{c}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{c}\cdot\vec{a}-(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b})+1 \ (\because ①) \\ &> \vec{c}\cdot\vec{a}-(-1-\vec{c}\cdot\vec{a})+1 \ (\because ②) \\ &= 2(\vec{c}\cdot\vec{a}+1) \\ &= 2(|\vec{c}||\vec{a}|\cos\theta_2+1) \ (\theta_2 \text{ は } \vec{c},\vec{a} \text{ のなす角}) \\ &= 2(\cos\theta_2+1) \ (\because ①) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}>0$ で，$\angle CBA$ は鋭角

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} &= (\vec{a}-\vec{c})(\vec{b}-\vec{c}) \\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}-(\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c})+1 \ (\because ①) \\ &> \vec{a}\cdot\vec{b}-(-1-\vec{a}\cdot\vec{b})+1 \ (\because ②) \\ &= 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+1) \\ &= 2(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_3+1) \ (\theta_3 \text{ は } \vec{a},\vec{b} \text{ のなす角}) \\ &= 2(\cos\theta_3+1) \ (\because ①) \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$ で，$\angle ACB$ は鋭角

以上から，$\triangle ABC$ は鋭角三角形である。

(2) $9-(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)=9-\{6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\}$

$$
\begin{aligned}
&=3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\
&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\
&=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2\\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

**これを逆算的に見ています**

**2 乗展開のときのクロスタームと見たいです**

となり，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成立する。

等号成立は $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ のとき

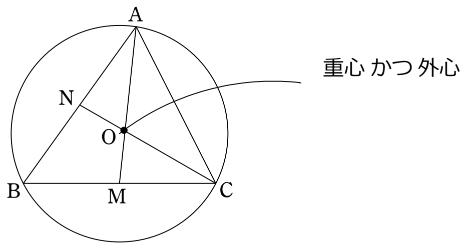
このとき，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{0}$ より，O は △ABC の重心である。

O は △ABC の外心でもあるので，△ABC の重心と外心が一致する。

つまり，△ABC は正三角形である。

以上から，等号成立は △ABC が正三角形のときである。

**注意　重心と外心が一致する三角形が正三角形となることの証明**




△ABC の重心と外心が一致しているとします。

外心の性質から OA＝OC（＝$2x$ とおきます）

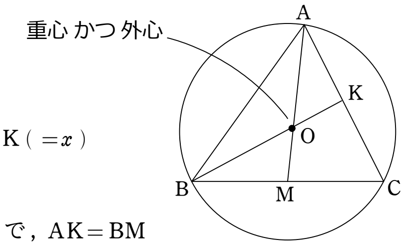
重心の性質から OM＝ON（＝$x$）

対頂角は等しく，∠AON＝∠COM

よって，△AON ≡ △COM が言えるため，AN＝CM

N，M はそれぞれ辺 AB，BC の中点であるため，AB＝BC

同様に見て




OA＝OB（＝$2x$），OM＝OK（＝$x$）
∠AOK＝∠BOM

ゆえに，△AOK ≡ △BOM で，AK＝BM

M，K はそれぞれ，辺 BC，CA の中点より，AC＝BC

以上から AB＝BC＝CA となり，△ABC は正三角形

**【戦略 2】**

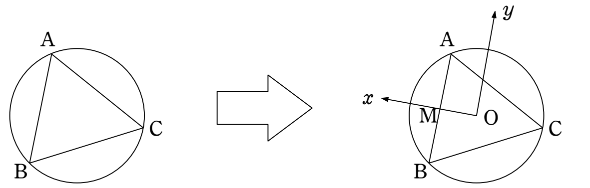
**座標を導入して解いてみます。**

**座標平面に張り付ける際ですが，闇雲に張り付けても自分で自分の首を絞めるだけです。**

**できる限り楽にするために工夫をして貼り付けます。**

**A，B の位置に応じて，線分 AB の中点を M としたとき**

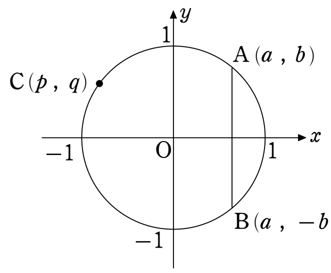
**$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の方向を $x$ 軸正の方向として $x$ 軸を設定し，A の $y$ 座標が正となるように $y$ 軸を設定してもかまいません。（下の図参照）**




**これにより，（図 1）のように**

A$(a,\ b)$，B$(a,\ -b)$
C$(p,\ q)$

**ただし** $0\leqq a<1,\ 0<b<1$
$-1\leqq p\leqq 1,\ -1\leqq q\leqq 1$




（図 1）

**と設定しても一般性を失いません。**

**この設定が終わったら $a^2+b^2=1$，$p^2+q^2=1$ という関係性を随時利用していきながら $\mathrm{AB}^2$，$\mathrm{BC}^2$，$\mathrm{CA}^2$ を計算し，ゴリゴリ進めていきましょう。**

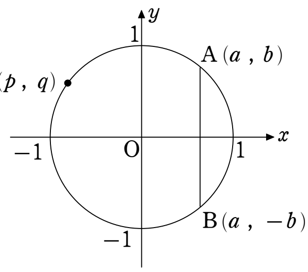
【解２】座標

（図１）のように

$A(a,\ b)$，$B(a,\ -b)$
$C(p,\ q)$

ただし $0 \leqq a < 1$，$0 < b < 1$
　　$-1 \leqq p \leqq 1$，$-1 \leqq q \leqq 1$

と設定しても一般性を失わない。




（図１）

このとき $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ p^2+q^2=1 \end{cases}$ …(*)

$AB^2=4b^2$

$BC^2=(p-a)^2+(q+b)^2$
　$=p^2-2ap+a^2+q^2+2bq+b^2$
　$=2-2ap+2bq$ （∵ (*)）

$CA^2=(p-a)^2+(q-b)^2$
　$=p^2-2ap+a^2+q^2-2bq+b^2$
　$=2-2ap-2bq$

$AB^2+BC^2+CA^2=4b^2+(2-2ap+2bq)+(2-2ap-2bq)$
　　　　　　　　$=4b^2+4-4ap$

(1)　条件より

$$4b^2+4-4ap>8$$

$$b^2+1-ap>2$$

$$b^2-ap-1>0$$

$$(1-a^2)-ap-1>0 \quad (∵ (*))$$

$$a^2+ap<0$$

$$a(a+p)<0$$

$a=0$ とするとこれを満たさないから，$a \fallingdotseq 0$

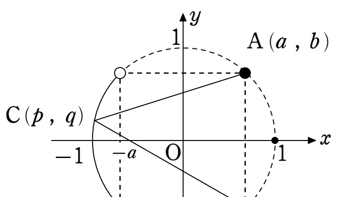
このとき，$0<a<1$ であるので，$a+p<0$

これより，$p<-a$

よって $C(p,\ q)$ は

（図２）の円周上のうち
実線部を動く。

ゆえに △ABC は鋭角三角形
である。




（図２）

(2)　$9-(AB^2+BC^2+CA^2)=9-(4b^2+4-4ap)$
　　　　　　　　　　$=-4b^2+4ap+5$
　　　　　　　　　　$=-4(1-a^2)+4ap+5$
　　　　　　　　　　$=4a^2+4ap+1$
　　　　　　　　　　$=(2a+p)^2+1-p^2$
　　　　　　　　　　$=(2a+p)^2+q^2$ （∵ (*) より $1-p^2=q^2$）
　　　　　　　　　　$\geqq 0$

となり，$AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 9$ が成立する。

等号成立は $p=-2a$ かつ $q=0$

$q=0$ より $p=\pm 1$ であり，このとき $a=-\dfrac{p}{2}=\mp\dfrac{1}{2}$（復号同順）

$a \geqq 0$ より $a=\dfrac{1}{2}$ を得て，このとき $p=-1$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ も得る。

つまり，$A\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C(-1,\ 0)$

このとき，△ABC は正三角形である。

【戦略３】

幾何的な道具である三角比，三角関数で考えてみます。

外接円の半径が $1$ であることから正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2$$

より，$\mathrm{BC}=2\sin A$ ，$\mathrm{CA}=2\sin B$ ，$\mathrm{AB}=2\sin C$ が言えますから

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=4(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$ となります。

ここから脳みそを使う部分ですが，次数を下げる目的で半角公式を使ってやると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=4\left(\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\right)\\&=6-2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\end{aligned}$$

となります。

ここから $A+B+C=\pi$ を使って話を進めます。

途中は半角公式や和積公式などを適宜駆使しながらほぐしていく部分にスタミナが必要かもしれません。

$$\begin{aligned}&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\&=\cos 2A+\cos 2B+\cos 2(\pi-A-B)\\&=\cos 2A+\cos 2B+\cos(2A+2B)\\&=2\cos\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+\cos 2(A+B)\\&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1\\&=2\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1\\&=2\cos(A+B)\cdot 2\cos\frac{(A-B)+(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)-(A+B)}{2}-1\\&=2\cos(A+B)\cdot 2\cos A\cos B-1\\&=4\cos(\pi-C)\cos A\cos B-1\\&=-4\cos A\cos B\cos C-1\end{aligned}$$

対称性を崩すことは怖かったですが，最終的には対称性が積の形で復活します。

なので，
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=6-2(-4\cos A\cos B\cos C-1)\\&=8+8\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

となります。

(1) は $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$，すなわち $\cos A\cos B\cos C>0$ となります。

これより

$\cos A$ ，$\cos B$ ，$\cos C$ のうち全てが正
または
$\cos A$ ，$\cos B$ ，$\cos C$ のうち $1$ つが正で $2$ つが負

ということが言えますが，後者は鈍角が $2$ つということになりありえません。

したがって前者が成立することになり，角 $A$，$B$，$C$ が全て鋭角であることが言えるため，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であることが示されます。

(2) は
$$\begin{aligned}9-(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)&=9-(8+8\cos A\cos B\cos C)\\&=1-8\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

より $\cos A\cos B\cos C\leqq\frac{1}{8}$ であることが示されれば解決です。

これについては，$A+B+C=\pi$ という従属 $3$ 変数のもとで

$\cos A\cos B\cos C$ の最大値が $\frac{1}{8}$ であることを目指すことになるでしょう。

(1) の対偶から，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鈍角三角形，もしくは直角三角形なら $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 8$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形のときで考えれば十分です。

$C$ を文字消去すれば

$$\begin{aligned}&\cos A\cos B\cos(\pi-A-B)\\&=-\cos A\cos B\cos(A+B)\\&=-\cos A\cdot\frac{1}{2}\{\cos\{B+(A+B)\}+\cos\{B-(A+B)\}\}\\&=-\frac{1}{2}\cos A\{\cos(A+2B)+\cos A\}\quad\cdots(☆)\end{aligned}$$

です。

ここからは $A$，$B$ は独立 $2$ 変数として扱います。

$A$ を固定して $B$ だけ動かします。

(☆) の値を大きくしようと思うと，$A+2B=\pi$，すなわち $B=\frac{\pi-A}{2}$ とすればよさそうです。

問題は $A$，$B$ が鋭角で動くときにこれが実現可能かどうかですが，今回は実現可能ですね。

つまり，
$$\begin{aligned}(☆)&\leqq-\frac{1}{2}\cos A\{-1+\cos A\}\\&=-\frac{1}{2}\cos^2 A+\frac{1}{2}\cos A\\&=-\frac{1}{2}\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\leqq\frac{1}{8}\end{aligned}$$

となり，目標達成です。

【解 3】三角比，三角関数

(1)　正弦定理より $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=2$

これより $BC=2\sin A$，$CA=2\sin B$，$AB=2\sin C$

ゆえに，$AB^2+BC^2+CA^2$

$$=4(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$$

$$=4\left(\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\right)$$

$$=6-2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\
&=\cos 2A+\cos 2B+\cos 2(\pi-A-B) \quad \longleftarrow \textbf{文字消去}\\
&=\cos 2A+\cos 2B+\cos(2A+2B)\\
&=2\cos\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+\cos 2(A+B) \quad \longleftarrow \textbf{和積}\\
&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1 \quad \longleftarrow \textbf{2倍角}\\
&=2\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1\\
&=2\cos(A+B)\cdot 2\cos\frac{(A-B)+(A+B)}{2}\cos\frac{(A-B)-(A+B)}{2}-1 \quad \longleftarrow \textbf{和積}\\
&=2\cos(A+B)\cdot 2\cos A\cos B-1\\
&=4\cos(\pi-C)\cos A\cos B-1\\
&=-4\cos A\cos B\cos C-1
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
AB^2+BC^2+CA^2&=6-2(-4\cos A\cos B\cos C-1)\\
&=8+8\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}
$$

ここで，$AB^2+BC^2+CA^2>8$ であるとき

$8+8\cos A\cos B\cos C>8$，すなわち $\cos A\cos B\cos C>0$

これは，$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ のうち

①：3つとも正の値

②：1つが正の値で，2つが負の値

ということを意味するが，$0<\theta<\pi$ において，$\cos\theta<0$ ということは $\theta$ が鈍角であるということを考えると，② は三角形の中に鈍角が2つあるということになり，ありえない。

したがって，① が言えることになり，△ABC は鋭角三角形であることが示された。

(2)

$$
\begin{aligned}
9-(AB^2+BC^2+CA^2)&=9-(8+8\cos A\cos B\cos C)\\
&=1-8\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}
$$

(1) の対偶から，△ABC が鈍角三角形，または直角三角形であれば $AB^2+BC^2+CA^2\leqq 8$ が成立するため，鋭角三角形に対して題意を示せば十分である。

$$
\begin{aligned}
&\cos A\cos B\cos C\\
&=\cos A\cos B\cos(\pi-A-B)\\
&=-\cos A\cos B\cos(A+B)\\
&=-\cos A\cdot\frac{1}{2}\{\cos\{B+(A+B)\}+\cos\{B-(A+B)\}\}\\
&=-\frac{1}{2}\cos A\{\cos(A+2B)+\cos A\}\ \cdots(☆)
\end{aligned}
$$

$A$ を固定して，$B$ だけ動かす中で，(☆) の値を大きくすることを考える。

$0<A<\dfrac{\pi}{2}$ のときを考えるため，$-\dfrac{1}{2}\cos A<0$ であることに注意して $\cos(A+2B)=-1$ となっているかに注目する。

$A+2B=\pi$，すなわち $B=\dfrac{\pi-A}{2}$ が実現可能かどうかであるが

$0<A<\dfrac{\pi}{2}$ であるため，$B=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$ とみれば，$\dfrac{\pi}{4}<B<\dfrac{\pi}{2}$

なので，$B=\dfrac{\pi-A}{2}$ は実現可能

ゆえに，$\cos A\cos B\cos C\leqq-\dfrac{1}{2}\cos A(-1+\cos A)$

$\left(\text{等号成立は } B=\dfrac{\pi-A}{2} \text{ のとき}\right)$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\cos A(-1+\cos A)&=-\frac{1}{2}\cos^2 A+\frac{1}{2}\cos A\\
&=-\frac{1}{2}\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\\
&\leqq\frac{1}{8}\ \left(\text{等号成立は } \cos A=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)
\end{aligned}
$$

これより，$\cos A\cos B\cos C\leqq-\dfrac{1}{2}\cos A(-1+\cos A)\leqq\dfrac{1}{8}$

が成立し，$9-(AB^2+BC^2+CA^2)\geqq 0$，すなわち

$$AB^2+BC^2+CA^2\leqq 9$$

が成立する。

等号成立は $\cos A=\dfrac{1}{2}$ かつ $B=\dfrac{\pi-A}{2}$ のとき

$0<A<\dfrac{\pi}{2}$ より，$A=\dfrac{\pi}{3}$ で，$B=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

このとき，$C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{3}$

つまり，等号成立は △ABC が正三角形のとき

【戦略 4】(1) について

**もし鈍角三角形や直角三角形だとマズイことが起こるのか？という頭の動かし方をした人は背理法という路線もあります。**

$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ **として，$a$ が最大辺のときを考えても一般性を失いません。**

**もし，$a^2+b^2+c^2>8$ であるにも関わらず $\triangle\mathrm{ABC}$ が鈍角三角形，または直角三角形だと仮定すると**

**最大角 $A$ が鈍角 または 直角なので，$\cos A\leqq 0$ で余弦定理から**

$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\leqq 0$，**すなわち $b^2+c^2\leqq a^2$ が言えます。**

**すると，$8<a^2+b^2+c^2\leqq a^2+a^2$ であることから $2a^2>8$，すなわち $a^2>4$ ということになります。**

**点 A，B，C は半径 1 の円上の点であるので，BC（$=a$）はどんなに大きくても直径である 2 までの値しかとれません。**

**つまり，$a\leqq 2$ なので，先ほどの $a^2>4$ と矛盾します。**

【解 4 (1)】幾何＆背理法

$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ として，$a$ が最大辺のときを考えても一般性を失わない。

このとき示すべきことは

$$a^2+b^2+c^2>8 \text{ ならば } \triangle\mathrm{ABC} \text{ が鋭角三角形}$$

ということ

$a^2+b^2+c^2>8$ であるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ が鈍角三角形，または直角三角形だと仮定する。

このとき，最大角は $A$ であり，これが鈍角または直角である。

ゆえに，$\cos A\leqq 0$ であり，余弦定理から $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\leqq 0$

すなわち $b^2+c^2\leqq a^2$ を得る。

これより，$8<a^2+b^2+c^2\leqq a^2+a^2$ となり，$a^2>4$ となる。

一方，BC（$=a$）の値は，直径である 2 までの値しかとれず，$0<a\leqq 2$

すなわち，$a^2\leqq 4$ となり，$a^2>4$ であることに矛盾する。

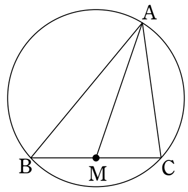
以上から，$a^2+b^2+c^2>8$ であるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形である。

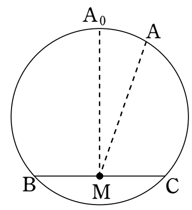
【戦略 5】(2) について

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ **という「辺の 2 乗和」から**

$$\textbf{中線定理}\quad \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{MB}^2)$$

**をインスピレーションすることも考えられます。**




**ここで，$\mathrm{AM}\leqq\mathrm{A_0M}$ なので，** $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\leqq 2(\mathrm{A_0M}^2+\mathrm{MB}^2)$

**つまり，B，C を固定し，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ を大きくしようと思うとAは上の図で言う $\mathrm{A_0}$，すなわち $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ となるような位置にとるのが最善だと分かります。**

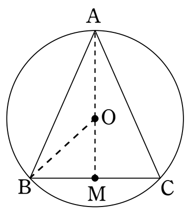
**よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ であるような二等辺三角形 ABC に対して**

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ **であることを示せば十分ということが分かります。**

**これが見抜けると色々な味付けが考えられますが，基本的にこの味を決めるのは「何を変数にとるか」です。**

**ここでは $\mathrm{OM}=x$ などと変数を設定してやろうと思います。**

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\\&=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)+\mathrm{BC}^2\\&=2\,\mathrm{AM}^2+2\,\mathrm{BM}^2+(2\mathrm{BM})^2\\&=2\,\mathrm{AM}^2+6\,\mathrm{BM}^2\end{aligned}$$

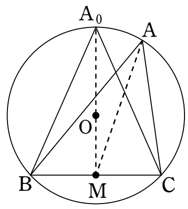



**ここで，** $\mathrm{AM}=1+x$，$\mathrm{BM}^2=\mathrm{OB}^2-\mathrm{OM}^2=1-x^2$

**ですから，**
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=2(1+x)^2+6(1-x^2)\\&=-4x^2+4x+8\\&=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9\leqq 9\end{aligned}$$

**と言え，証明完了です。**

【解 5 (2)】幾何～中線定理～




辺 BC の中点を M とする。

中線定理から

$AB^2+CA^2+BC^2=2(AM^2+BM^2)+BC^2$

ここで，$AM \leqq A_0M$ なので，$2(AM^2+BM^2) \leqq 2(A_0M^2+BM^2)$

これより，B，C を固定し，A のみを動かしたとき，
$AB^2+BC^2+CA^2$ の値を大きくしようと思ったら，A を図の $A_0$ の場所すなわち $AB=AC$ を満たす場所にすることが最善である。

よって，$AB=AC$ の二等辺三角形 ABC に対して

$$AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 9$$

が成立することを示せばよい。

$\triangle ABC$ の外心を O として，$OM=x$ とおく。

$$\begin{aligned} AB^2+CA^2+BC^2 &= 2(AM^2+BM^2)+BC^2 \\ &= 2(AM^2+BM^2)+(2BM)^2 \\ &= 2AM^2+6BM^2 \end{aligned}$$

ここで，$AM=1+x$

三平方の定理から $BM^2=OB^2-OM^2=1-x^2$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに，} AB^2+BC^2+CA^2 &= 2(1+x)^2+6(1-x^2) \\ &= -4x^2+4x+8 \\ &= -4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+9 \leqq 9 \end{aligned}$$

となり，証明された。

等号成立は，$AB=AC$ かつ $x=\dfrac{1}{2}$ のときで，このとき直角三角形 OBM の 3 辺の比率に注目すれば，$\angle OBM=\dfrac{\pi}{6}$

すなわち $\triangle ABC$ が正三角形のときに等号が成立する。

【総括】

図形の問題では別解が豊富にあります。

特に

幾何　座標　ベクトル　複素数平面

の４分野については相互横断的にものが見れるようにしておきたいところです。

今回は紹介した以外にも沢山別解が考えられると思います。

まず，幾何的に解決できればそれが一番早いことが多いですが，反面「思いつけばいいけどね」と言わざるを得ないでしょう。

座標やベクトルについては図形を扱う道具の中でも機械的な態度で進める分野なので，確実性は高い方針ですが，反面計算量や処理量が多めと言えます。

また，幾何の弱点として，

「あなたの絵だとそれは言えるかもしれないけど，こういう絵のときでも大丈夫？」

のような突っ込みに弱いです。

反面，座標やベクトルについては，ある意味式的なバックボーンがある分一般性に強いことになります。

それぞれ一長一短がありますね。

試験場でとれる解法は一つですが，普段の学習においては出来る限り様々な考え方を探す訓練をしておくと，いざというときにそれが身を助けてくれることがあるかもしれません。