数列 $\{a_n\}$（$n=1,2,3,\cdots\cdots$）を $a_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ で定める。

ここで e は自然対数の底とする。

(1) $0\leqq\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt\leqq 1-e^{-1}$ （$n=1,2,3,\cdots\cdots$）を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ。

(3) $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{(n+1)!e}$ （$n=1,2,3,\cdots\cdots$）を示せ。

(4) $e=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ を示せ。

＜ '04 高知大 ＞

【戦略】

(1) は「体の一部を定数化」ですね。

解答では n を含む方を定数化しています。これは示すべき不等式に「n が残っていないから」 です。

一般にこの手の問題は最終的に極限の問題となり，「はさみうちの原理」に持ち込まれます。

そのため「不等式の中に n を残す」ことが有効にはたらくことが多く，これまで扱った問題もそうでしたね。
つまり「n を含まない方を定数化」する目的は「n を不等式に残す」ということです。

手段だけを覚えて目的を理解しないのは一番マズイ勉強です。

示すべき不等式に「n が残っているかどうか」を考えて定数化しましょう。

(2) は (1) がヒントになっていますので方針では困らないでしょう。

(3) も積分漸化式をつくるのに部分積分が有効だという基本事項を勉強していれば無理ではないはずです。

(4) は $\dfrac{1}{\bigcirc!}$ の形が (3) にありますから，当然それを利用することを考えていきます。

そう考えると，(3) を変形して $e(a_k-a_{k+1})=\dfrac{1}{(k+1)!}$ まではいくでしょう。

もちろん，この右辺が将来の $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\cdots$ になるという目論見です。

よって，$e(a_k-a_{k+1})=\dfrac{1}{(k+1)!}$ に $k=1,2,3,\cdots,n-1$ を代入して辺々加えると，左辺では和の中抜けが起こり，一気に解決に向かいます。

もちろん階差数列としての処理と見ることもできます。

解答

(1) $0\leqq t\leqq 1$ のとき，$0\leqq t^n\leqq 1$ であるから，$0\leqq t^n e^{-t}\leqq e^{-t}$

$$0\leqq\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt\leqq\int_0^1 e^{-t}\,dt$$

$\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^1=1-e^{-1}$ より， $0\leqq\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt\leqq 1-e^{-1}$ が成立する。

(2) (1) の不等式の辺々を $n!$ で割ると，$0\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{n!}(1-e^{-1})$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}(1-e^{-1})=0$ であり，はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(3)
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}(-e^{-t})'\,dt\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\Big[t^{n+1}(-e^{-t})\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)t^n\cdot(-e^{-t})\,dt\right\}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{-e^{-1}-(n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt\right\}\\&=a_n-\frac{1}{(n+1)!\,e}\end{aligned}$$

(4) (3) より $a_k-a_{k+1}=\dfrac{1}{(k+1)!\,e}$ で，$e(a_k-a_{k+1})=\dfrac{1}{(k+1)!}$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}e(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$ $\cdots(*)$

(左辺)$=e\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=e(a_1-a_n)$

ここで，

$$\begin{aligned}a_1&=\int_0^1 t\,e^{-t}\,dt\\&=\int_0^1 t(-e^{-t})'\,dt\\&=\Big[-t\,e^{-t}\Big]_0^1-\int_0^1(-e^{-t})\,dt\\&=-e^{-1}-\Big[e^{-t}\Big]_0^1\\&=-2e^{-1}+1\end{aligned}$$

よって (左辺)$=e(-2e^{-1}+1-a_n)$
$=-2+e-e\,a_n$

ゆえに，(*) より $e=2+e\,a_n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$

$n\to\infty$ とすると，(2) より，

$$\begin{aligned}e&=2+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)\\&=1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

【総括】

本問は e^x のマクローリン展開というものを題材とした問題です。

（e^x は $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$ という形で無限級数として表すことができます。これを e^x のマクローリン展開といいます。）

ただし，入試においてはこれを使って解答を書くことは許されません。

しかし本問のように誘導をつけて高校生にも解けるように出題されることは多いです。（いいか悪いかはおいといて）

大学入学後のことも踏まえ，余裕のある受験生は心構えとして常識にしておくとよいでしょう。

ただ，背伸びしてその知識に溺れたりしてほしくはありません。

ひとまず本問において学んでほしいことは，

①：体の一部を定数化

②：部分積分経由での積分漸化式の作成

という定石的解法をきちんと運用することです。

確認用の復習用問題もつけておきます。

【復習用問題】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{n\,!}\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定義する。ただし，e は自然対数の底とする。次の各問に答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $0\leqq t\leqq 1$ のとき $t^n\leqq t$ であることを用いて

$$a_n\leqq\frac{a_1}{n\,!}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を示せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4) $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{e\,(n+1)!}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)$ を求めよ。

＜ ’12 茨城大 ＞

解答

(1)
$$\begin{aligned}a_1&=\frac{1}{1!}\int_0^1 te^{-t}\,dt\\&=\Big[-te^{-t}\Big]_0^1-\int_0^1 t'(-e^{-t})\,dt\\&=-e^{-1}-\Big[e^{-t}\Big]_0^1\\&=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)\\&=1-\frac{2}{e}\end{aligned}$$

(2) 積分区間 $0\leqq t\leqq 1$ において $t^n\leqq t$ より $t^ne^{-t}\leqq te^{-t}$

これより，$\displaystyle\frac{1}{n\,!}\int_0^1 t^ne^{-t}\,dt\leqq\frac{1}{n\,!}\int_0^1 te^{-t}\,dt$

すなわち $a_n\leqq\dfrac{a_1}{n\,!}$ が成立する。

(3) 積分区間 $0\leqq t\leqq 1$ において，$t^ne^{-t}\geqq 0$ なので，(2) の結果もあわせて考えると

$$0\leqq a_n\leqq\frac{a_1}{n\,!}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{n\,!}=0$ なので，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ …答

(4)
$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 t^{n+1}(-e^{-t})'\,dt\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\Big[-t^{n+1}e^{-t}\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)\,t^n\,(-e^{-t})\,dt\right\}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left\{-\frac{1}{e}+(n+1)\int_0^1 t^ne^{-t}\,dt\right\}\\&=-\frac{1}{e\,(n+1)!}+\frac{1}{n\,!}\int_0^1 t^ne^{-t}\,dt\\&=a_n-\frac{1}{e\,(n+1)!}\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

(5)　(4) より $\dfrac{1}{(k+1)!}=e\,(a_k-a_{k+1})$

$n\to\infty$ のときを考えるので，$n\geqq 2$ のときで考えてよく，このとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}&=e\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\\&=e\,\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\}\\&=e\,(a_1-a_n)\\&=e\left(1-\frac{2}{e}-a_n\right)\\&=e-2-ea_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}(e-2-ea_n)\\&=e-2\ \cdots\ \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

最後の結果は

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=e$$

であることを意味します。

(2)，(3) というコンボのヒントがありましたが

積分区間 $0\leqq t\leqq 1$ において，$0\leqq t^ne^{-t}\leqq e^{-t}$ と体の一部を定数化すれば

$$0\leqq\frac{1}{n\,!}\int_0^1 t^ne^{-t}\,dt\leqq\frac{1}{n\,!}\int_0^1 e^{-t}\,dt$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\,!}\int_0^1 e^{-t}\,dt&=\frac{1}{n\,!}\Big[-e^{-t}\Big]_0^1\\&=\frac{1}{n\,!}(-e^{-1}+1)\end{aligned}$$

となり，$0\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{n\,!}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{e}\right)=0$ なので，

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を得ます。

これは言わば $t^n\leqq 1$ と評価したことになります。

本問のヒントである $t^n\leqq t$ よりもラフな評価ですが，はさみうちに成功しました。

その他にも 積分区間 $0\leqq t\leqq 1$ において $\dfrac{1}{e}\leqq e^{-t}\leqq 1$ であることを利用して　$t^ne^{-t}\leqq t^n$ と e^{-t} の方を定数化することでも

$0\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt\left(=\frac{1}{(n+1)!}\right)$ として，はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を得ます。（こちらはよりシビアな評価ですね）

そう考えるとヒントなしでも「体の一部を定数化」という言葉一つで戦えるでしょう。