

定積分と不等式評価4【メルカトル級数】

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数である。

(1) $a_1 = \log 2 - 1$ を示せ。

(2) $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ を示せ。

(3) $a_n = \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) を示せ。

(4) $x \geq 0$ のとき $\frac{1}{1+x} \leq 1$ であることを用いて $|a_n| \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ を求めよ。

< '15 山形大 >