

定積分と不等式評価4【メルカトル級数】

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数である。

- (1) $a_1 = \log 2 - 1$ を示せ。
- (2) $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ を示せ。
- (3) $a_n = \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ($n=2, 3, 4, \dots$) を示せ。
- (4) $x \geq 0$ のとき $\frac{1}{1+x} \leq 1$ であることを用いて $|a_n| \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。
- (5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ を求めよ。

< '15 山形大 >

【戦略】

非常に丁寧な(丁寧すぎる)誘導が付いています。

- (1) 仮分数を帯分数に直して計算します。
- (2) b_n を手なりにほぐしていただけます。
($-1)^{n+1}$ で括る部分は集中しましょう。
- (3) 階差数列の教科書的処理です。
 Σ の表現を見直す必要がありますので、一度具体的に書き下してか
ら、あらためて Σ でまとめればよいでしょう。

(4) $|a_n| = \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right|$ ですが、積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geq 0 \text{ ですから, } |a_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \text{ です。}$$

こともあろうに $\frac{1}{1+x} \leq 1$ を使えという、ほとんど答えに近い方針を
与えてくれています。

- (5) (3) から $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 - a_n$ ですから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が分かれば
おしまいです。
そしてそれは(4)の結果を用いて、はさみうちの原理から即座に分か
ります。

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad a_1 &= - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - 1 \right) dx \\ &= \left[\log|1+x| - x \right]_0^1 \\ &= \log 2 - 1 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

$$\begin{aligned} (2) \quad b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \left\{ \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^1 x^n dx \\ &= (-1)^{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(3) $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= (\log 2 - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \\ &= \log 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \log 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \right) \\ &= \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(4) 積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ なので

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$$

$$\text{よって, } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ より, } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$|a_n| = \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \text{ であることから}$$

$$0 \leq |a_n| \leq \frac{1}{n+1} \dots \textcircled{1}$$

であり、題意は示された。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ なので、①, 及び, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

これより, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(3)の結果から $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2 - a_n$ であるので

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log 2 - a_n) \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

以上から, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2$... 圏

【総括】

個人的には少し誘導を与えすぎな感じがしました。

(4)で, 「それ言ったらほとんど答えじゃないですか」と突っ込んだ人は多いでしょう。

言われなくても積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \frac{x^n}{1}$$

と「体の一部を定数化」します。

ちなみに, 本問で扱った

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

を「メルカトル級数」と言います。

本問のように定積分の不等式評価を用いないのであれば

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \right) \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right\} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right\} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$S_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N}$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log |1+x| \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \log 2$$

と区分求積法による式変形で導出できます。

今回の問題が少し軽かったので, 本問と前回やったライブニッツ級数の話題を足して2で割ったような確認問題をつけておきます。

【復習用問題】

自然数 n に対し、定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ を与える。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ。
- (2) $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき (1), (2) を用いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

< ' 18 名古屋大 >

【戦略】

(1) は「 I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ」という問いかけ方だったら、正答率は結構下がると思いますが、本間のような問いかけ方であれば親切です。

(2) の評価も積分区間の範囲において、 x はかければかけるほど小さくなることを用いて評価していきます。

(3) は (2) の不等式からの「はさみうちの原理」が目に見えますが、単純に (2) の不等式をそのままはさみうちに使うことはできません。

「積分漸化式に絡め」というセオリーに従って (1) で作った積分漸化式をうまく用いて評価していきます。

(4) は (1) の等式に $n=1, 2, \dots$ を辺々代入してうまく使うことになりすが、これは求める S_n の形を見据えて符号をうまく設定することになります。(ここまでの学習がしっかりできていれば、お決まりの流れに見えると思います。)

【復習用問題】 解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I_n + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

(2) 積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において、 $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ であり、

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{x^2+1} \leq \frac{x^n}{x^2+1}$$

ゆえに、 $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ が成り立ち、

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n \quad \dots \textcircled{1}$$

また、積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において、 $0 \leq \frac{x^{n+2}}{x^2+1}$ なので、

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1} dx, \text{ すなわち } 0 \leq I_{n+2}$$

両辺 I_n を加えて、 $I_n \leq I_{n+2} + I_n$ であり、(1) より $I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より、 $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成立する。

(3) (2) より数列 $\{I_n\}$ は単調減少数列であり、 $I_{n+2} \leq I_n$ なので、 $I_n + I_{n+2} \leq I_n + I_n$ であり、(1) から $\frac{1}{n+1} \leq 2I_n$ 、すなわち

$$\frac{n}{2n+2} \leq nI_n \quad \dots \textcircled{3}$$

一方、 $I_n + I_{n+2} \geq I_{n+2} + I_{n+2}$ であり、(1) から $\frac{1}{n+1} \geq 2I_{n+2}$ で、

$$I_{n+2} \leq \frac{1}{2n+2}$$

$n \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $n \geq 2$ として考えてもよく、

$$I_n \leq \frac{1}{2(n-2)+2} = \frac{1}{2n-2} \text{ で、 } nI_n \leq \frac{n}{2n-2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より、 $\frac{n}{2n+2} \leq nI_n \leq \frac{n}{2n-2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-2} = \frac{1}{2}$ より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{\square}$$

(4)

$$\begin{aligned}
I_1 + I_3 &= \frac{1}{2} \\
-I_3 - I_5 &= -\frac{1}{4} \\
I_5 + I_7 &= \frac{1}{6} \\
-I_7 - I_9 &= -\frac{1}{8} \\
&\vdots \\
(-1)^{n-1} I_{2n-1} + (-1)^{n-1} I_{2n+1} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n}
\end{aligned}$$

辺々加えて、 $I_1 + (-1)^{n-1} I_{2n+1} = S_n$

$$\text{ここで、} I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} [\log(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\text{ゆえに、} 0 \leq |S_n - I_1| = \left| S_n - \frac{1}{2} \log 2 \right| = |(-1)^{n-1} I_{2n+1}| = I_{2n+1}$$

$$\left| S_n - \frac{1}{2} \log 2 \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1} = 0 \text{ 及び はさみうちの原理})$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \log 2 \quad \dots \text{ 答}$$

【戦略2】

$x = \tan \theta$ という置換が目につく人も多いと思います。

この置換により $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n d\theta$ という $\tan \theta$ の積分漸化式を求める問題に帰着します。

$\int \sin^n \theta d\theta$ や $\int \cos^n \theta d\theta$ に関する積分漸化式は部分積分によって漸化式を作りますが、 \tan についての積分漸化式は少し流れが違って、

$$I_{n+2} \text{ の場合、} I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n (\tan \theta)^2 d\theta \text{ と 2 乗を分けて考えます。}$$

本問の誘導は割と親切で、 $I_n + I_{n+2}$ を計算させるような問いかけになっていますから親切ですが、この方針の場合では、「 I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ」という問いかけ方でも対応できてほしいです。

(「定積分と不等式2」でも同じことを言いました。)

このあたりの流れは前回までの問題に通じるものがあると思います。

【別解】 (1) $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと、 $dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$,

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan \theta)^n}{1 + \tan^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n d\theta \quad \left(\because 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって、} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^{n+2} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\
&= \left[\frac{1}{n+1} (\tan \theta)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

となり、示された。

(2) 積分区間 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ において、 $0 \leq \tan \theta \leq 1$ だから、

$$0 \leq (\tan \theta)^{n+1} \leq (\tan \theta)^n$$

$$\text{よって、} 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^{n+1} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^n d\theta \text{ で、} 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \quad \dots \text{ ①}$$

$$\text{ここで、} 0 \leq (\tan \theta)^{n+2} \text{ より、} 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan \theta)^{n+2} d\theta \text{ で、} I_{n+2} \geq 0$$

$$\text{両辺 } I_n \text{ を加えると、} I_n + I_{n+2} \geq I_n \text{ なので、(1) より } \frac{1}{n+1} \geq I_n \quad \dots \text{ ②}$$

$$\text{①, ② より、} 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ が示された。}$$

【総括】

ライプニッツ級数が $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ と、分母が奇数の交代級数であるのに対して、本問は $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$ という分母が偶数の交代級数を扱っています。

ちなみに

$$\text{メルカトル級数 } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

を考えると、本問の $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \log 2$ という結果はメルカトル級数の半分です。