

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ を求めよ。

< '03 京都大 >

【戦略】

あまりの簡潔さに逆にフリーズしそうですが、見た瞬間のファーストインプレッションは

計算できないΣ？ → だったら面積評価か？

区分求積？ → $(-1)^k$ が厄介だな

みたいな感じでしょうか。とりあえず手を動かしてみないことにはこれ以上何かを見いだすことは難しそうですから、無限級数の扱いの一步目として「部分和をとる」ところから手を動かしてみます。

手を動かして部分和を書き下してみると、偶数番目の項が正で、奇数番目の項が負ですから

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \left(\frac{2m}{2n}\right)^{100} - \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^{100} \right\}$$

と見ればさらに前進で、Σの中に $f\left(\frac{2m}{2n}\right) - f\left(\frac{2m-1}{2n}\right)$ の形が見えることから平均値の定理に持ち込む目処がたつと思います。

($f(\) - f(\)$ の形に対して、平均値の定理は有力な選択肢です。)

そうすると、平均値の定理で登場する不等式を用いて、はさみうちの原理に持ち込んでみたくなってきます。

【解答】

$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100}$ とおく。

$$\begin{aligned} S_n &= -\left(\frac{1}{2n}\right)^{100} + \left(\frac{2}{2n}\right)^{100} - \left(\frac{3}{2n}\right)^{100} + \left(\frac{4}{2n}\right)^{100} - \cdots - \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{100} + \left(\frac{2n}{2n}\right)^{100} \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ \left(\frac{2m}{2n}\right)^{100} - \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^{100} \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = x^{100}$ とおく。

$f(x)$ は微分可能で、区間 $\frac{2m-1}{2n} \leq x \leq \frac{2m}{2n}$ において平均値の定理を用いると

$$\begin{cases} f\left(\frac{2m}{2n}\right) - f\left(\frac{2m-1}{2n}\right) = \left\{ \left(\frac{2m}{2n}\right) - \left(\frac{2m-1}{2n}\right) \right\} f'(c) \quad \cdots \textcircled{1} \\ \frac{2m-1}{2n} < c < \frac{2m}{2n} \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

とともに満たす c が少なくとも1つ存在する。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow f\left(\frac{2m}{2n}\right) - f\left(\frac{2m-1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} f'(c)$$

今 $f'(x) = 100x^{99}$, $f''(x) = 100 \cdot 99 \cdot x^{98}$

区間 $\frac{2m-1}{2n} \leq x \leq \frac{2m}{2n}$ において $f'(x) \geq 0$ より、

$f'(x)$ はこの区間で単調増加。

ゆえに、 $\textcircled{2}$ から $f'\left(\frac{2m-1}{2n}\right) < f'(c) < f'\left(\frac{2m}{2n}\right)$

ここの評価が若干難しいですね。

さらに、 $\frac{2m-2}{2n} < \frac{2m-1}{2n}$ なので、 $f'\left(\frac{2m-2}{2n}\right) < f'\left(\frac{2m-1}{2n}\right)$

これにより、 $f'\left(\frac{2m-2}{2n}\right) < f'(c) < f'\left(\frac{2m}{2n}\right)$

すなわち $f'\left(\frac{m-1}{n}\right) < f'(c) < f'\left(\frac{m}{n}\right) \quad \cdots \textcircled{3}$ を得る

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 100 \left(\frac{m-1}{n}\right)^{99} < f'(c) < 100 \left(\frac{m}{n}\right)^{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n} \cdot 100 \left(\frac{m-1}{n}\right)^{99} < \frac{1}{2n} f'(c) < \frac{1}{2n} \cdot 100 \left(\frac{m}{n}\right)^{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{n} \left(\frac{m-1}{n}\right)^{99} < f\left(\frac{2m}{2n}\right) - f\left(\frac{2m-1}{2n}\right) < \frac{50}{n} \left(\frac{m}{n}\right)^{99}$$

$m = 1, 2, \dots, n$ を代入し、辺々加えると

$$\sum_{m=1}^n \frac{50}{n} \left(\frac{m-1}{n}\right)^{99} < S_n < \sum_{m=1}^n \frac{50}{n} \left(\frac{m}{n}\right)^{99}$$

$$\begin{aligned} (\text{最左辺}) &= \frac{50}{n} \sum_{m=1}^n \left(\frac{m-1}{n}\right)^{99} \\ &= \frac{50}{n} \left\{ \left(\frac{0}{n}\right)^{99} + \left(\frac{1}{n}\right)^{99} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{99} \right\} \\ &= \frac{50}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{99} \\ &\rightarrow 50 \int_0^1 x^{99} dx = 50 \left[\frac{1}{100} x^{100} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$(\text{最右辺}) = \frac{50}{n} \sum_{m=1}^n \left(\frac{m}{n}\right)^{99} \rightarrow 50 \int_0^1 x^{99} dx = 50 \left[\frac{1}{100} x^{100} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$

以上から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\frac{k}{2n}\right)^{100} = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{\square}$

【総括】

Σ の絡んだ極限ですから、区分求積法を疑う反応があって然るべきです。
直接区分求積法を適用することは難しいと判断して、はさみうちの原理などを考える反応も自然です。

どうやってはさむのか、については「求められない Σ は面積評価」というセオリーが脳裏をよぎりますが、 $y = (-1)^x \left(\frac{x}{2n} \right)^{100}$ のグラフがパッと
はかけません。

そこで、手を動かしていく中で平均値の定理をインスピレーションしたいところですが、口で言うほど簡単ではないと思います。

形から何をインスピレーションするのか？インスピレーションした方針で見通しはたつのか？ということ意識することが大切だとあらためて実感しますね。