次の問いに答えよ。

(1) x，y は実数とする。$z=\dfrac{-x^2+xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ の最小値を求めよ。

(2) n を与えられた正の整数，M を定数とする。すべての正の数 a，b に対して

$$(a+b)^n \leqq M(a^n+b^n)$$

が成立するような最小の M を求めよ。

＜(1) '16 立命館大 (2) '90 立命館大 ＞

【戦略 1】

(1) **与えられた分数式が分母・分子ともに同次式（斉次式）です。**

（同次式とは各項の次数が同じ式のことです。）

同次式では変数の数を減らすことができます。

分母，分子を x^2 で割ると

$$z=\frac{-\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{xy}{x^2}+\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{xy}{x^2}+\dfrac{y^2}{x^2}}$$

となり，$\dfrac{y}{x}=t$ とおくことで，$z=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ と 1 変数化できます。

おそらくこれは経験がないと中々出てこないでしょう。

ただし，こうできるのは $x\neq 0$ のときなので，$x=0$ か $x\neq 0$ かという場合分けが必要となります。

この後パッと目に付く方針としては

「仮分数（頭でっかち）を帯分数へ」

という方針でしょうか。

頭でっかちは嫌われますので，割り算して商と余りを求めることで

$$z=1-\frac{2}{t^2+t+1}$$

となります。

そうなると t^2-t+1 が 最小となればよいという単純な問題になりますので，あとは消化試合です。

(2) **左辺，右辺ともに同次式です。**

$(a+b)^n$ が同次式と見れないかもしれませんが

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$$

と二項展開すればさすがに同次式だと認めてくれると思います。
（解答ではそこまではしないですが）

両辺 a^n（>0）で割り，$t=\dfrac{b}{a}$ とおくことで

$$\frac{(1+t)^n}{1+t^n}\leqq M$$

が $t>0$ で常に成り立つ M の最小値を求めればよいという部分までほぐすことができます。

これは「絶対不等式」としてみることで，左辺の最大値が M に負けていればいいと捉えます。

一番強いやつが M に負けるのだから，その他の連中はみんな M に負けるでしょ（常に成り立つでしょ）という戦国武将理論です。

【解 1】

(1) $x=0$ のときは $z=\dfrac{y^2}{y^2}=1$

$x\neq 0$ のとき，$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}z&=\frac{-\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{xy}{x^2}+\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{xy}{x^2}+\dfrac{y^2}{x^2}}\\&=\frac{t^2+t-1}{t^2+t+1}\\&=1-\frac{2}{t^2+t+1}\\&=1-\frac{2}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\end{aligned}$$

$\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ に注意すると

$\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ が最小のとき，$\dfrac{2}{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$ が最大となり

z は最小となる。

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき z は最小値 $1-\dfrac{2}{\dfrac{3}{4}}=-\dfrac{5}{3}$ をとる。

これは $x=0$ のときの $z=1$ よりも小さい値である。

以上から，z の最小値は $-\dfrac{5}{3}$ …答

(2)　$a>0$ より与えられた不等式の両辺を a^n (>0) で割ると

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^n \leqq M\cdot\frac{a^n+b^n}{a^n}\text{，すなわち}\quad \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \leqq M\left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}$$

$\dfrac{b}{a}=t$ (>0) とおくと，$(1+t)^n \leqq M(1+t^n)$

$1+t^n>0$ より

$$\frac{(1+t)^n}{1+t^n}\leqq M$$

これが任意の正の数 t で成立する最小の M を求めればよい。

$f(t)=\dfrac{(1+t)^n}{1+t^n}$ $(t>0)$ とおく。

(i)　$n=1$ のとき $f(t)=1$ (定数関数)

(ii)　$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{n(1+t)^{n-1}(1+t^n)-(1+t)^n\cdot nt^{n-1}}{(1+t^n)^2}\\ &=\frac{n(1+t)^{n-1}(1-t^{n-1})}{(1+t^n)^2}\end{aligned}$$

$(1+t^n)^2>0$，$n(1+t)^{n-1}>0$ に注意すると

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	2^{n-1}	↘	1

よって，$f(t)$ $(t>0)$ の最大値は 2^{n-1}

ゆえに，$2^{n-1}\leqq M$ であれば題意を満たす。

(これは (i) の結果も含めて言える。)

以上から，求める最小の M は $M=2^{n-1}$ … 答

【(1) 戦略 2】

$z=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ を得た後ですが，逆像法 (しらみつぶしの考え方) によって処理することも可能です。

$z=1$ になれる？ →　$1=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$，すなわち $t^2+t-1=t^2+t+1$ を満たす t が存在するか？

→　存在しない。

→　$z=1$ になれない。

$z=\dfrac{1}{2}$ になれる？ →　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$，すなわち $t^2+t-3=0$ を満たす t が存在するか？

→　$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ と (汚いけど) 実数として存在する

→　$z=\dfrac{1}{2}$ になれる。

このように

$z=$○ になれる？$z=$□ になれる？……

としらみつぶしに探していく気持ちです。

もちろん本当に直接はしらみつぶしできないので，

$z=k$ になれる？（なれるとしたらどんな k ？）

として，k としてあり得る値を考えていくことになります。

【(1) 解 2】部分的別解　($z=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ を得てから)

$z=k$ とすると，$k(t^2+t+1)=t^2+t-1$

整理して $(k-1)t^2+(k-1)t+k+1=0$ …(*)

$k=1$ のとき，$0\cdot t^2+0\cdot t+2=0$ でこれを満たす t は存在しない。

ゆえに $k\neq 1$ であり，(*) を満たす実数 t が少なくとも 1 つあるための k の条件を求める。

(*) の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D&=(k-1)^2-4(k-1)(k+1)\\ &=-3k^2-2k+5\end{aligned}$$

$D\geqq 0$ となればよく，$-3k^2-2k+5\geqq 0$ でこれを整理すると

$$(3k+5)(k-1)\leqq 0$$

$k\neq 1$ に注意すれば $-\dfrac{5}{3}\leqq k<1$ を得る。

ゆえに，z ($=k$) のとり得る値の最小値は $-\dfrac{5}{3}$ … 答

【(1) 戦略３】

$z=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ **としてから以降ですが，微分という正面突破もありますが，**

これは最後の手段でしょう。

【(1) 解３】 部分的別解 （ $z=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ を得てから ）

$f(t)=\dfrac{t^2+t-1}{t^2+t+1}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
f'(t)&=\frac{(2t+1)(t^2+t+1)-(t^2+t-1)(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}\\
&=\frac{(2t+1)\{(t^2+t+1)-(t^2+t-1)\}}{(t^2+t+1)^2}\\
&=\frac{2(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}
\end{aligned}
$$

t	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$-\dfrac{5}{3}$	↗

したがって，z の最小値は $-\dfrac{5}{3}$ … 答

補足

微分するにしても，帯分数に直してから微分した方が楽になることが多いのですが，帯分数に直そうと思うぐらいの人は【解１】の路線でいくと思いますので，ここでは敢えて仮分数のまま進めました。

とは言え、今回はそこまで大変ではなかったですが。

【総括】

同次式の扱いについては，経験がものをいいます。

まずは同次式特有の処理を進められるかが山場でしょう。

(1) では【解 1】のような「仮分数から帯分数への変形」がまずは自然な方針だと思います。

今回たまたま，$z=(\text{定数})+\dfrac{(\text{定数})}{(2\text{ 次式})}$ という形でしたが，

一般に２次式を２次式で割った商は定数，余りは高々１次なので

$$z=(\text{定数})+\frac{(1\text{ 次式})}{(2\text{ 次式})}$$

となります。

例えば，$z=1+\dfrac{t+2}{t^2+t+3}$ であれば

$$z=1+\frac{1}{\dfrac{t^2+t+3}{t+2}}=1+\frac{1}{t-1+\dfrac{5}{t+2}}=1+\frac{1}{(t+2)+\dfrac{5}{t+2}-3}$$

と見て相加平均・相乗平均の関係に持ち込みます。

（この場合 $t>-2$ などの条件があると楽ですが）

このパターンの方が一般的だということも認識しておきたいですね。

また，【解２】の逆像法（しらみつぶしの考え方）についても折に触れて確認したい重要事項です。（本問の場合は大げさだったかもしれませんが大切な解法です。）

(2) は $(a+b)^n$ が同次式に見えないと中々難しいですね。

それが見えてからは

$\dfrac{(1+t)^n}{1+t^n}\leqq M$ が $t>0$ において常に成り立つ

$\Leftrightarrow$

$t>0$ における $f(t)=\dfrac{(1+t)^n}{1+t^n}$ の最大値 が M 以下

という絶対不等式としての処理ということになります。

これは本問に限らず様々な問題の中で現れますので，確認しておきたい基本事項です。

絶対不等式としての捉え方

$x\leqq a$ や $x\geqq b$ など，どのタイプの範囲でも同じです

$f(x)\leqq c$ が $a\leqq x\leqq b$ において常に成り立つ

$\Leftrightarrow$

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大値 M について，$M\leqq c$

（その範囲の最強が負けるんだったら他の連中も負ける）

$f(x)\geqq c$ が $a\leqq x\leqq b$ において常に成り立つ

$\Leftrightarrow$

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最小値 m について，$m\geqq c$

（その範囲の最弱が勝てるんだったら他の連中も勝てる）