$\triangle$ABC に対し，

$$\vec{p}=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA})\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})\overrightarrow{BC}$$

とする。

(1) $\triangle$ABC が正三角形ならば，$\vec{p}=\vec{0}$ であることを示せ。

(2) $\vec{p}=\vec{0}$ ならば，$\triangle$ABC は正三角形であることを示せ。

(3) $\triangle$ABC が直角三角形ならば，$|\vec{p}|=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{CA}|$ であることを示せ。

(4) $|\vec{p}|=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{CA}|$ ならば，$\triangle$ABC は直角三角形であることを示せ。

＜ '87 東京水産大 ＞

【(1)，(2) 戦略】

ベクトルの式変形の扱いとしては２次元の話であれば

２本の主役ベクトル（基底）を決めて，それで表す

というのが基本ですが，与えられた式の対称性も捨てがたい特徴です。

そこで選択肢としては $\begin{cases}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \text{を基底として進める}\\ \text{対称性を活かしてこのまま}\end{cases}$

が考えられます。

とりあえず，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を基底として進める方針で考えていきます。

【 解答 (1)，(2) 】

(1)

$\vec{p}=\{\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\}(-\overrightarrow{AC})+\{(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AC})\}\overrightarrow{AB}+\{(-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

これを整理すると

$$\vec{p}=\{2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2\}\overrightarrow{AB}+\{|\overrightarrow{AB}|^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}\overrightarrow{AC}\ \cdots ①$$

正三角形 ABC の一辺の長さを x とすると

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2=x^2$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}x^2$$

これらを ① に代入すると

$$\vec{p}=\left\{2\cdot\frac{1}{2}x^2-x^2\right\}\overrightarrow{AB}+\left\{x^2-2\cdot\frac{1}{2}x^2\right\}\overrightarrow{AC}$$

$$=\vec{0}$$

となり，$\triangle$ABC が正三角形 $\Longrightarrow$ $\vec{p}=\vec{0}$ が 示された。

(2) $\vec{p}=\vec{0}$ であるとき，

$$\{2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2\}\overrightarrow{AB}+\{|\overrightarrow{AB}|^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$\triangle$ABC が成立しているという前提なので，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立であり，

$$\begin{cases}2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2=0\\ |\overrightarrow{AB}|^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{cases}|\overrightarrow{AB}|^2=2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\ \cdots ②\\ |\overrightarrow{AC}|^2=2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\ \cdots ③\end{cases}$$

②，③ より，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ なので，

$\triangle$ABC は AB＝AC の二等辺三角形 ⋯ ④

また，AB＝AC＝t，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とする。

② より $t^2=2\cdot t\cdot t\cdot\cos\theta$，すなわち $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ で $\theta=60^\circ$ ⋯ ⑤

④，⑤ より $\triangle$ABC は正三角形である。

ゆえに，$\vec{p}=\vec{0}\Longrightarrow\triangle$ABC は正三角形 であることが示された。

【(3)，(4) 戦略】

先ほどの方針で引き続き (3) について考えていくと

$\vec{p}=\{2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2\}\overrightarrow{AB}+\{|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}\overrightarrow{AC}$

$\angle A$ が直角のとき $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ なので，$\vec{p}=-|\overrightarrow{AC}|^2\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2\overrightarrow{AC}$ となります。

再び $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ に注意すると

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|\overrightarrow{AC}|^4|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AB}|^4|\overrightarrow{AC}|^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2)\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2\ (\because\ \text{三平方の定理})\end{aligned}$$

となり，題意が示されます。

$\angle B$ が直角のときは $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ を基底に
$\angle C$ が直角のときは $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ を基底に

とって考えれば同様に示すことができます。
（このあたりを対称性という言葉で省エネするかどうかは試験場においては時間との兼ね合いです。）

(4) はもう $\vec{p}=\{2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2\}\overrightarrow{AB}+\{|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}\overrightarrow{AC}$ として考えるのは限界でしょう。

そこで，当初の２路線あるうちの「対称性」を活かす方針に切り替え，最初に与えられた式を観察します。

いずれにせよ，目がチカチカしますから

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\vec{c}\\\overrightarrow{BC}=\vec{a}\\\overrightarrow{CA}=\vec{b}\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\gamma\\\vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha\\\vec{c}\cdot\vec{a}=\beta\end{cases}$$

とおくと，$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ と目に優しくなります。

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=\alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+2\alpha\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2\beta\gamma\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2\gamma\alpha\,\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+6\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

です。

最終的に $\alpha\beta\gamma=0$ を目指します。
α，β，γ だけの式を目指すために $|\vec{a}|^2$，$|\vec{b}|^2$，$|\vec{c}|^2$ には消えていただきましょう。

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ですから

$$\begin{cases}|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(-\vec{c}-\vec{b})=-\beta-\gamma\\|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{c})=-\gamma-\alpha\\|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(-\vec{b}-\vec{a})=-\alpha-\beta\end{cases}$$

となり，$|\vec{p}|^2=\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma$ を得ます。

一方で (4) の前提条件である $|\vec{p}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2$ より

$|\vec{p}|^2=-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ ということが言えます。

よって，

$\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma=-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

でこれを整理すると $8\alpha\beta\gamma=0$，すなわち $\alpha\beta\gamma=0$ を得ます。

これは内積 α，β，γ のいずれかが 0 であることを意味し，直角三角形であることが示されます。

【解答 (3)，(4)】

(3)　$\vec{p}=\{2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AC}|^2\}\overrightarrow{AB}+\{|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\}\overrightarrow{AC}$

において，$\angle A$ が直角のときは $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ なので

$$\vec{p}=-|\overrightarrow{AC}|^2\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2\overrightarrow{AC}$$

再び $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ に注意すると

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|\overrightarrow{AC}|^4|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AB}|^4|\overrightarrow{AC}|^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2)\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{CA}|^2\ (\because\ \text{三平方の定理})\end{aligned}$$

また，最初に与えられた $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\{2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}-|\overrightarrow{BA}|^2\}\overrightarrow{BC}+\{|\overrightarrow{BC}|^2-2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}\}\overrightarrow{BA}$$

とも変形できる。

$\angle B$ が直角のとき $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$ なので $\vec{p}=-|\overrightarrow{BA}|^2\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2\overrightarrow{BA}$

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|\overrightarrow{BA}|^4|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}|^4|\overrightarrow{BA}|^2\\&=|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{BA}|^2(|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BA}|^2)\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{CA}|^2\ (\because\ \text{三平方の定理})\end{aligned}$$

また，最初に与えられた $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\{2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-|\overrightarrow{CB}|^2\}\overrightarrow{CA}+\{|\overrightarrow{CA}|^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\}\overrightarrow{CB}$$

とも変形できる。

$\angle C$ が直角のとき $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ なので $\vec{p}=-|\overrightarrow{CB}|^2\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{CA}|^2\overrightarrow{CB}$

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=|\overrightarrow{CB}|^4|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CA}|^4|\overrightarrow{CB}|^2\\&=|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2)\\&=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{BC}|^2|\overrightarrow{CA}|^2\ (\because\ \text{三平方の定理})\end{aligned}$$

よって，$\triangle ABC$ が直角三角形 $\Longrightarrow$ $|\vec{p}|=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|$ が示された。

(4) $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\vec{c} \\ \overrightarrow{BC}=\vec{a} \\ \overrightarrow{CA}=\vec{b} \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=\gamma \\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha \\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\beta \end{cases}$ とおくと，$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+2\alpha\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2\beta\gamma\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2\gamma\alpha\,\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= \alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+6\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ であるので

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(-\vec{c}-\vec{b})=-\beta-\gamma \\ |\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{c})=-\gamma-\alpha \\ |\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(-\vec{b}-\vec{a})=-\alpha-\beta \end{cases}$$

これより，$|\vec{p}|^2=\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma$ …(ア)

一方，条件より $|\vec{p}|=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$ なので，$|\vec{p}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2$

ゆえに，$|\vec{p}|^2=-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ …(イ)

(ア)，(イ) より

$\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma=-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

これを整理すると，$8\alpha\beta\gamma=0$ となり，$\alpha\beta\gamma=0$ を得る。

これは $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ または $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ または $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

すなわち $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ または $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ または $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

これは $\angle A$ が直角 または $\angle B$ が直角 または $\angle C$ が直角

ということを意味し，△ABC は直角三角形である。

【戦略 2】～方針のみ～ (3) から対称性を意識した方針

(3) まで「始点を揃える」という戦略で引っ張りましたが，(3) の段階から，もう対称性を意識してもよいでしょう。

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\vec{c} \\ \overrightarrow{BC}=\vec{a} \\ \overrightarrow{CA}=\vec{b} \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=\gamma \\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha \\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\beta \end{cases}$ **とおくと，$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ です。**

$\angle A$ が直角なら $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ですから $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，すなわち $\alpha=0$ です。

すると，$\vec{p}=\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ となりますから

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+2\beta\gamma\,\vec{b}\cdot\vec{c} \\ &= \beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta) \\ &= -\beta^2\gamma-\gamma^2\beta \\ &= -\beta\gamma(\beta+\gamma) \\ &= -(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ (\because\ \alpha=0) \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

となります。

$\angle B$，$\angle C$ が直角のときも同様です。

【戦略 3】～方針のみ～ (3), (4) を同時に片づける方針

$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}\\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}\end{cases}$ $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\gamma\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha\\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\beta\end{cases}$ **とおくと，** $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

であり，

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=\alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+2\alpha\beta\,\vec{a}\cdot\vec{b}+2\beta\gamma\,\vec{b}\cdot\vec{c}+2\gamma\alpha\,\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\alpha^2|\vec{a}|^2+\beta^2|\vec{b}|^2+\gamma^2|\vec{c}|^2+6\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

が言えます。

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ **に注意すれば** $\begin{cases}|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(-\vec{c}-\vec{b})=-\beta-\gamma\\ |\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{c})=-\gamma-\alpha\\ |\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(-\vec{b}-\vec{a})=-\alpha-\beta\end{cases}$ **なので**

$|\vec{p}|^2=\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma$ **を得ます。**

一方で $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2=-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ **です。**

そこで， $|\vec{p}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2$ **を計算してみると**

$|\vec{p}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2$

$=\alpha^2(-\beta-\gamma)+\beta^2(-\gamma-\alpha)+\gamma^2(-\alpha-\beta)+6\alpha\beta\gamma-\{-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\}$

$=8\alpha\beta\gamma$

なので， $\triangle\mathrm{ABC}$ **が直角三角形** $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$ **または** $\beta=0$ **または** $\gamma=0$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2=0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{p}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$$

と (3), (4) **を同時に片づけることもできます。**

【総括】

分野のセオリーで行けば，始点を揃えて基底を考えたくなります。

その一方で対称性を考えると A，B，C というものを対等に扱いたくもあります。

例えば始点を A にして $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を基底にとるという態度は

対等なはずの A，B，C の中で A を贔屓している

という態度です。

対称性という観点から言えばこれはあまり好ましくないでしょうし，得られる結果もキレイとは言えない形です。
（基本的には対称性に逆らうと汚くなりがちです。）

まずは分野的なセオリーに従って解き進め，この方針だとさすがに苦しいなというところで，対称性を重視した態度に切り替えました。