次の問いに答えよ。

(1) 等式 $mn=4m-3n+24$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

(2) 等式 $m^2n-2mn+3n-36=0$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

(3) 等式 $m^3-m^2n+(2n+3)m-3n+6=0$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。

< '16 東京理科大 >

【戦略】

(1) **は典型的な形で，与えられた等式が** $(m+3)(n-4)=12$ **と変形できるので，ここから** 12 **の約数を拾っていきます。**

闇雲に全て拾うと大変なので，候補を削る工夫をできる限りしていきます。

その際は $\left\{\begin{array}{l}\text{符号}\\\text{大小}\\\text{互いに素チェック（偶奇チェック）}\end{array}\right.$ **に目を向けましょう。**

今回は $m+3>3$ **なので，** $m+3$ **は** 3 **より大きい** 12 **の約数ということで**

$m+3=4$, 6, 12 **となります。**

(2) **も積の形にすることを目指せば自然と**

$$n(m^2-2m+3)=36$$

と変形するでしょう。

符号は $n>0$ **なので，** $m^2-2m+3>0$ **ですが，欲張って**

$(m-1)^2+2$ **と見てやると，** 36 **の約数のうち** 2 **以上のものを拾えばよく**

$(m-1)^2+2=2$, 3, 4, 6, 9, 12, 18 **となるので**

$(m-1)^2=0$, 1, 2, 4, 7, 10, 16

平方数として存在しなければいけないので， $(m-1)^2=0$, 1, 4, 16

すなわち $m-1=0$, 1, 2, 4 **となり，** $m=1$, 2, 3, 5 **となります。**

(3) **は** m **で括るか** n **で括るかという選択肢がありますが，次数の低い文字に注目するセオリーから，** n **で括ろうと思います。**

すると， $n=\dfrac{m^3+3m+6}{m^2-2m+3}$ **を得ると思いますが，これは分子の次数の方が大きい仮分数です。**

仮分数（頭でっかち）はろくな事がありませんから，帯分数に直しましょう。

$$n=m+2+\frac{4m}{m^2-2m+3} \Leftrightarrow n-m-2=\frac{4m}{m^2-4m+3}$$

を得て，(整数)=(分数) が登場します。

次数的に考えると m **が大きくなると，分母の方が大きくなり，** 0.*** **となってしまい整数にならないことが予見できます。**

このことから， m **はそんなに大きくないだろうと判断でき，** m **の範囲を絞りに行こうという方向が見えてきます。**

(分母) >0 **なので，** $\dfrac{4m}{m^2-4m+3}$ **は正の整数，すなわち** $\dfrac{4m}{m^2-4m+3}\geqq 1$ **となり，** m **が絞れます。**

【解答】

(1) 与えられた等式を変形すると $(m+3)(n-4)=12$

m は自然数より，$m+3>3$

ゆえに，$m+3$ は 3 より大きい 12 の約数である。

よって，$(m+3,\ n-4)=(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(12,\ 1)$

$\therefore\ (m,\ n)=(1,\ 7)$, $(3,\ 6)$, $(9,\ 5)$ …答

(2) 与えられた等式を変形すると $n(m^2-2m+3)=36$

すなわち $n\{(m-1)^2+2\}=36$

$(m-1)^2+2$ は 2 以上の 36 の正の約数なので

$(m-1)^2+2=2$, 3, 4, 6, 9, 12, 18 となり，

$(m-1)^2=0$, 1, 2, 4, 7, 10, 16 を得る。

$(m-1)^2$ が平方数として存在するので

$(m-1)^2=0$, 1, 4, 16 であり，$m-1=0$, 1, 2, 4

すなわち $m=1$, 2, 3, 5 を得る。

これに対応する n の値はそれぞれ $n=18$, 12, 6, 2

$\therefore\ (m,\ n)=(1,\ 18)$, $(2,\ 12)$, $(3,\ 6)$, $(5,\ 2)$ …答

(3)　与えられた等式を変形すると $(-m^2+2m-3)n=-m^3-3m-6$

次数の低い n で括りました。

これより $n=\dfrac{m^3+3m+6}{m^2-2m+3}$ ，すなわち $n=m+2+\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$

これより，$n-m-2=\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$ を得る。

左辺は整数より，右辺も整数で，(分母)$=(m-1)^2+2>0$ なので
右辺は正の整数である。

ゆえに，$\dfrac{4m}{m^2-2m+3}\geqq 1$ で，整理すると $m^2-6m+3\leqq 0$ を得る。

$(m-3)^2\leqq 6$ で，$(m-3)^2$ が平方数として存在するので

$(m-3)^2=0,\ 1,\ 4$ で，$m-3=0,\ \pm 1,\ \pm 2$

これより，$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$n=m+2+\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$ に代入するとそれぞれ

$$n=5,\ \frac{20}{3},\ 7,\ \frac{82}{11},\ \frac{73}{9}$$

を得る。

$$\therefore\ (m,\ n)=(1,\ 5),\ (3,\ 7)\ \cdots\ 答$$

【総括】

(1)，(2) は試験場であれば落とせません。

多少の工夫が思いつかなくても，正面突破できなくはないと思いますし，
符号の判定ぐらいであれば嫌でも目に付くはずです。

(3) では「次数の低い文字に注目」というセオリーに従い，n で括る選択をしました。

m で括ってみると，$m\{m^2-mn+2n+3\}=3(n-2)$ となり，ここから
中々身動きがとれなくなります。

その後は仮分数（頭でっかち）は嫌われるというセオリーに従い帯分数に
直しました。

これは分野を問わず意識したいセオリーです。

これにより，$n-m-2=\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$ という (整数)$=$(分数) の形が現れ
ます。

例えば，$xy=12$ (x，y は自然数) から

$$(x,\ y)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1)$$

と約数を拾います。

同じことですが，$y=\dfrac{12}{x}$ と (整数)$=$(分数) の形を作って

左辺が整数より，右辺も整数となるので，x は 12 の正の約数

として，$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$ と拾っていくことができるわけです。

これはこれでよくやる見方です。

ただ，今回は $n-m-2=\dfrac{4m}{m^2-2m+3}$ で，分母にも分子にも m がいて
困るのですが，次数的に

「m が大きいと分母の方が大きく，整数にならないんじゃないか」

と睨むことがポイントで，このあたりから評価する (範囲を絞る) という方
針も同時に運用することを考えることになります。

$\left\{\begin{array}{l}\text{積の形からの約数拾い}\\ \text{余りで分類}\\ \text{評価する (範囲を絞る)}\end{array}\right.$ という基本手法は**いつでも**意識したいところです。