

ランダムウォーク【事象の内訳を捉える】

座標平面上で x 座標, y 座標がいずれも整数である点を格子点という。
格子点上を次の規則 (a), (b) に従って動く点 P を考える。

- (a) 最初に, 点 P は原点 O にある。
(b) ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき, その 1 秒後の点の位置は, 隣接する格子点 $(m+1, n), (m, n+1), (m-1, n), (m, n-1)$ のいずれかであり, またこれらの点に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$ である。

- (1) 点 P が最初から 6 秒後に, 直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。
(2) 点 P が最初から 6 秒後に, 原点 O にある確率を求めよ。

< '17 東京大 >

【戦略 1】

現実的には右方向, 左方向, 上方向, 下方向に何回移動したかを文字を使ってゴリゴリ処理していくのが, 大多数の受験生の試験場での解答になると思われます。

【解 1】

u, d, r, l は 0 以上の整数とする。

$$6 \text{ 秒間の間に } \begin{cases} \text{上方向に } u \text{ 回} \\ \text{下方向に } d \text{ 回} \\ \text{右方向に } r \text{ 回} \\ \text{左方向に } l \text{ 回} \end{cases} \text{ 移動したとする。}$$

このとき, 点 P は $(r-l, u-d)$ にいるので, 6 秒後に点 P が $y=x$ 上にあるとき,

$$\begin{cases} u+d+r+l=6 & \dots \text{①} \\ r-l=u-d & \dots \text{②} \end{cases}$$

② より, $d+r=u+l$ であり, ① に代入して, $2(u+l)=6$ で,

$$u+l=3$$

ゆえに, $(u, l)=(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$

このとき, $(d, r)=(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$

よって,

$$(u, l, d, r)=(0, 3, 0, 3), (0, 3, 1, 2), (0, 3, 2, 1), (0, 3, 3, 0)$$

$$(1, 2, 0, 3), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (1, 2, 3, 0)$$

$$(2, 1, 0, 3), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 1, 3, 0)$$

$$(3, 0, 0, 3), (3, 0, 1, 2), (3, 0, 2, 1), (3, 0, 3, 0)$$

$(0, 3, 0, 3), (0, 3, 3, 0), (3, 0, 0, 3), (3, 0, 3, 0)$ の場合の移動の仕方は各々 $\frac{6!}{3!3!}$ 通り

$$(0, 3, 1, 2), (0, 3, 2, 1), (1, 2, 0, 3), (1, 2, 3, 0)$$

$$(2, 1, 0, 3), (2, 1, 3, 0), (3, 0, 1, 2), (3, 0, 2, 1)$$

の場合の移動の仕方は各々 $\frac{6!}{3!2!}$ 通り

$$(1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1)$$

の場合の移動の仕方は各々 $\frac{6!}{2!2!}$ 通り

よって, $4 \times \frac{6!}{3!3!} + 8 \times \frac{6!}{3!2!} + 4 \times \frac{6!}{2!2!} = 80 + 480 + 720 = 1280$ 【通り】
が題意を満たす動き方。

動き方の総数は 4^6 通りでこれらは同様に確からしいから,

$$\text{求める確率は } \frac{1280}{4^6} = \frac{5}{16} \dots \text{答}$$

(2) $r-l=0, u-d=0$, すなわち $r=l, u=d$ となっているのは

$$(u, l, d, r)=(0, 3, 0, 3), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (3, 0, 3, 0)$$

ゆえに, $2 \times \frac{6!}{3!3!} + 2 \times \frac{6!}{2!2!} = 40 + 360 = 400$ 【通り】が題意を満たす動き方。

$$\text{したがって, } \frac{400}{4^6} = \frac{25}{256} \dots \text{答}$$

【戦略2】

傾き1の直線間をどのような確率で動くのかに目を付けます。

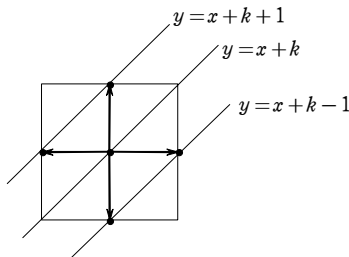
ただ、中々気が付きにくいと思いますので、試験場では結構焦る問題だと思います。

閃き一発に見えるこの戦略に辿り着くための着眼点は後述します。

【解2】

(1)

$$y=x+k \text{ 上にいる } 1 \text{ 秒後に } \begin{cases} y=x+k+1 \text{ 上にいる確率は } \frac{1}{2} \\ y=x+k-1 \text{ 上にいる確率は } \frac{1}{2} \end{cases}$$



事象 A : $y=x+k$ 上から $y=x+k+1$ 上に移動する事象
 事象 B : $y=x+k$ 上から $y=x+k-1$ 上に移動する事象

とすると、求める確率は 6 秒間で事象 A が 3 回、事象 B が 3 回起こる確率で

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{16} \dots \text{答}$$

【総括】

【解1】の

u, d, r, l は 0 以上の整数とする。

$$6 \text{ 秒間の間に } \begin{cases} \text{上方向に } u \text{ 回} \\ \text{下方向に } d \text{ 回} \\ \text{右方向に } r \text{ 回} \\ \text{左方向に } l \text{ 回} \end{cases} \text{ 移動したとする。}$$

このとき、点 P は $(r-l, u-d)$ にいるので、

$$\begin{cases} u+d+r+l=6 \dots \text{①} \\ r-l=u-d \dots \text{②} \end{cases}$$

これ以降について、少し考察をしてみます。

② より $u+l=r+d$

① より、 $u+l=r+d=3$ であり、 $u+l=A, r+d=B$ とおくと、

$$A=B=3$$

ここで、 A, B とは何でしょうか？

A とは $u+l$ 、すなわち 上方向と左方向の合計回数です。

つまり、 $A=3$ とは「上方向または左方向の移動の合計回数」が 3 回ということの意味します。

同様に考えると、 $B=3$ とは「下方向または右方向の移動の合計回数」が 3 回ということの意味します。

ここまで考察できればしめたもので、

「上方向または左方向への移動」… $y=x+k$ から $y=x+k+1$ への移動
 「下方向または右方向への移動」… $y=x+k$ から $y=x+k-1$ への移動

と、捉えると、【解2】に合流します。

また、(2)において

(2) 対称性から 6 秒後に $y=-x$ 上にある確率も $\frac{5}{16}$

6 秒後に原点 O にある確率は、

$$\text{”6 秒後に } y=x \text{ 上”かつ”6 秒後に } y=-x \text{ 上”}$$

となる確率であり、

$$\left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{25}{256}$$

とするのは、「6 秒後に $y=x$ 上である事象」と「6 秒後に $y=-x$ 上である事象」が独立であることを自明のものとしていて、試験場ではリスクがあると思います。