正の整数 x, y, z に対して，等式

$$3^x+4^y=5^z$$

が成り立つのは，$(x, y, z)=(2, 2, 2)$ のときのみであることを示せ。

【戦略】

指数型の不定方程式は一般的に解くのが困難です。

方針としては整数問題の基本である，「約数の拾い上げ」という方針に走りたいですね。

そのためには $(\text{整数})\times(\text{整数})=(\text{整数})$ **と積の形を作る必要があります。**

すなわち，因数分解が必要になります。

そこで，$○^{\text{偶数}}-△^{\text{偶数}}$ **が因数分解できることに目をつけ，**x, z **が偶数であることを見出すことができれば，話が進んでいきます。**

$x=2X$, $z=2Z$ **とおけるので，**$4^y=(5^Z+3^X)(5^Z-3^X)$ **となり，**

$\begin{cases}5^Z+3^X=2^\alpha\\5^Z-3^X=2^\beta\end{cases}$ $(\alpha>\beta,\ \alpha+\beta=2y)$ **と表すことができます。**

辺々を引くと $2\cdot3^X=2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)\ (=2^\beta\times(\text{奇数}))$ **となりますから，両辺の素因数** 2 **の個数に注目すると，**$\beta=1$ **を得ることになります。**

すると，今度は $3^X=2^{2y-2}-1=(2^{y-1}+1)(2^{y-1}-1)$ **を得るため**

$\begin{cases}2^{y-1}+1=3^u\\2^{y-1}-1=3^v\end{cases}$ $(u>v$ で，$u+v=X)$ **と表すことができます。**

辺々を引くと，$2=3^v(3^{u-v}-1)$ **を得るため，今度は両辺の素因数** 3 **の個数に注目すれば** $v=0$ **となります。**

ここからは $2=3^u-1$ **から** $u=1$

$X=u+v=1$ → $x=2X=2$ → $3^X=2^{\alpha-1}-1$ **から** $\alpha=3$

→ $\alpha+\beta=2y$ **から** $y=2$

と芋づる式に色々求まっていきます。

$x=2$, $y=2$ **が得られれば，**$z=2$ **も自ずと決定です。**

【解答】

まず，$3\equiv-1$，$4\equiv0$，$5\equiv1\pmod 4$ であるから，

$$3^x+4^y\equiv(-1)^x\pmod 4,\quad 5^z\equiv1\pmod 4$$

ゆえに，$(-1)^x\equiv1\pmod 4$ となるため，x は偶数である必要がある。

また，$3\equiv0$，$4\equiv1$，$5\equiv-1\pmod 3$ であるから

$$3^x+4^y\equiv1\pmod 3,\quad 5^z\equiv(-1)^z\pmod 3$$

ゆえに，$(-1)^z\equiv1\pmod 3$ となるため，z も偶数である必要がある。

以上から，$x=2X$, $z=2Z$（X, Z は正の整数）とおける。

このとき与えられた等式は

$$\begin{aligned}4^y&=5^z-3^x\\&=5^{2Z}-3^{2X}\\&=(5^Z+3^X)(5^Z-3^X)\end{aligned}$$

すなわち，

$$(5^Z+3^X)(5^Z-3^X)=2^{2y}$$

ゆえに，

$\begin{cases}5^Z+3^X=2^\alpha\ \cdots①\\5^Z-3^X=2^\beta\ \cdots②\end{cases}$ （$\alpha>\beta\ \cdots③$ で $\alpha+\beta=2y\ \cdots④$ を満たす）

とおける。（ただし，α, β は整数）

①－② より，

$$\begin{aligned}2\cdot3^X&=2^\alpha-2^\beta\\&=2^\beta(2^{\alpha-\beta}-1)\ \cdots(*)\end{aligned}$$

③ より，$\alpha-\beta$ は正の整数であるから，$2^{\alpha-\beta}-1$ も正の整数。

ゆえに，$(*)$ の左辺と右辺の素因数 2 の個数を比べれば

$$\beta=1$$

したがって $(*)$ に代入すれば，$3^X=2^{\alpha-1}-1\ \cdots(*)'$

④，及び $\beta=1$ から $\alpha=2y-1$ なので，

$$\begin{aligned}3^X&=2^{2y-2}-1\\&=(2^{y-1}+1)(2^{y-1}-1)\end{aligned}$$

これより，

$\begin{cases}2^{y-1}+1=3^u\\2^{y-1}-1=3^v\end{cases}$ （$u>v$ で，$u+v=X$）

とおける。（u, v は整数）

辺々引くことによって，

$$\begin{aligned}2&=3^u-3^v\\&=3^v(3^{u-v}-1)\end{aligned}$$

$u-v$ は正の整数なので，素因数 3 の個数に注目すれば，$v=0$

このとき，$2=3^u-1$ であり，$u=1$ を得る。

したがって，$X=1$ を得て，$x=2$

$(*)'$ より，$3=2^{\alpha-1}-1$ であり，$\alpha=3$ を得て，④から $3+1=2y$

すなわち，$y=2$

これにより，$z=2$ も得るため，$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 2)$ のみが求める解である。

【総括】

指数型の不定方程式は難易度が高く，とっかかりを見出すのに苦労します。

本問の場合，次々と着眼点を変えて処理する必要があります。

まず x，z が偶数であることを見抜くためには両辺を $\mathrm{mod}\,4$，$\mathrm{mod}\,3$ で柔軟に比較する必要があります。

その後も「積の形から約数拾い」という態度になり，素因数 2 の個数に注目したり，素因数 3 の個数に注目したりということで，かなり視線の移動が激しくなり，振り落とされかねません。

一つ一つは整数問題でよく使う手法ではありますが，その運用面において難問の部類に入ると思います。

参考

今回の問題については シェルピンスキーという数学者によって証明されました。

本問を一般化した問題

$a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数 a，b，c に対して

$a^x+b^y=c^z$ を満たす正の整数 x，y，z の組は

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 2)$$

のみであるか？

これは「イエスマノヴィッツ予想」と呼ばれ，多くの具体的なピタゴラス数については正しいことが示されていましたが，一般的には未解決問題です。

ただ，ABC 予想の解決がイエスマノヴィッツ予想の部分的な解決を含んでいるそうです。

ABC 予想については京都大学の望月新一教授により，解決が宣言され，一時期話題になったものの，国際的なコンセンサスが得られていない状況です。

この先どのような展開を迎えるのか注目したいですね。