自然数 $a$，$b$，$c$ について，等式 $a^2+b^2=c^2$ が成り立ち，かつ $a$，$b$ は互いに素とする。このとき，次のことを証明せよ。

(1) $a$ が奇数ならば，$b$ は偶数であり，したがって $c$ は奇数である。

(2) $a$ が奇数のとき，

$$a+c=2d^2$$

となる自然数 $d$ が存在する。

＜ '99 京都大 ＞

**【戦略】**

**(1) はピタゴラス数についての定番の問いで，第 1 講を学習した人から見ればおなじみの問いです。**

**一般に整数 $m$，$k$ に対して**

$$m=2k \text{ のとき，} m^2=4k^2$$
$$m=2k+1 \text{ のとき，} m^2=4(k^2+k)+1$$

**であることを利用します。**

**これは平方数を 4 で割った余りが 0 か 1 かで，元の数の偶奇が判定できることを意味します。**

**(2) は中々スムーズに手が動かないかもしれません。**

**(1) より，$b=2B$ などとおくと，$b^2=(c+a)(c-a)$ という式から**

$$B^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2}$$

**という式を得ます。（$a$，$c$ はともに奇数なので，$\frac{c\pm a}{2}$ は整数です。）**

**証明すべき内容に目を向けると，$\frac{c+a}{2}$ が平方数になるということを主張しています。**

**普通に考えれば，(平方数)×(平方数)＝(平方数) なのですが**

**$2\times8=16$ のように，(非平方数)×(非平方数) でも結果が平方数となることはありえます。**

**$B^2$ という平方数が (平方数)×(平方数) という形に限られるということを証明するためには，$\frac{c+a}{2}$，$\frac{c-a}{2}$ が互いに素であるということを証明すればよいでしょう。**

**先ほどの $2\times8$ がなぜダメかというと共通素因数をもってしまっているからです。**

**$\frac{c+a}{2}$，$\frac{c-a}{2}$ が素因数を分かち合うことなく各々が平方数になっていることを目指すのです。**

【解答】

(1) 一般に整数 $m$，$k$ に対して

$$m=2k \text{ のとき，} m^2=4k^2$$
$$m=2k+1 \text{ のとき，} m^2=4(k^2+k)+1$$

ということから，平方数 $m^2$ を 4 で割った余りは 0 または 1 …(*)

$a$ が奇数のとき，$b$ も奇数と仮定する。

このとき，$a=2A+1$，$b=2B+1$（$A$，$B$ は整数）と表せるので

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2\\&=(2A+1)^2+(2B+1)^2\\&=4(A^2+B^2+A+B)+2\end{aligned}$$

となり，$c^2$ という平方数を 4 で割った余りが 2 ということになり，(*) に矛盾する。

ゆえに，$a$ が奇数であれば，$b$ は偶数であることが示された。

このとき，$c^2=a^2+b^2=(\text{奇数})^2+(\text{偶数})^2=(\text{奇数})$ であり，$c$ も奇数となる。

(2) (1) より，$b=2B$（$B$ は整数）とおける。

このとき，

$$\begin{aligned}b^2&=c^2-a^2\\&=(c+a)(c-a)\end{aligned}$$

ゆえに，$4B^2=(c+a)(c-a)$ であり，

$$B^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2} \quad \cdots①$$

ここで，$\frac{c+a}{2}$，$\frac{c-a}{2}$ が公約数 $G$（$\geqq 2$）をもつと仮定する。

$$\begin{cases}\dfrac{c+a}{2}=G\alpha\\[2mm]\dfrac{c-a}{2}=G\beta\end{cases} \quad (\alpha,\ \beta \text{ は整数})$$

と表せ，これより，$a=(\alpha-\beta)G$，$c=(\alpha+\beta)G$ を得る。

このとき $b^2=(c+a)(c-a)=(2G\alpha)(2G\beta)=4\alpha\beta G^2$

これは $a$，$b$ が公約数 $G$（$\geqq 2$）をもつことを意味し，$a$，$b$ が互いに素であることに矛盾する。

ゆえに，$\frac{c+a}{2}$，$\frac{c-a}{2}$ は互いに素である。…②

①，② より $\frac{c+a}{2}$，$\frac{c-a}{2}$ がそれぞれ平方数となるしかなく

$$\frac{c+a}{2}=d^2,\ \frac{c-a}{2}=e^2$$

を満たす互いに素な自然数 $d$，$e$ が存在することになる。

これより，$a+c=2d^2$ となる自然数 $d$ が存在することが示された。

【総括】

(2) というオチがどういうことかを考えてみます。

(2) は中途半端に $c+a=2d^2$ となる自然数 $d$ の存在しか言及していませんが，その導出仮定から $c-a=2e^2$ となる自然数 $e$ の存在も確認できます。

よくあるアルファベットでの結論にするために

$$\begin{cases} c+a=2m^2 \\ c-a=2n^2 \end{cases} \quad (m\text{，}n\text{ は互いに素である自然数})$$

とします。

これら 2 式より，$a=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$ という結論を得ます。
($a$ は奇数なので，$m$，$n$ の偶奇は異なり，$a>0$ より $m>n$ です)

このとき，

$$\begin{aligned} b^2 &= (c+a)(c-a) \\ &= (2m^2)(2n^2) \\ &= 4m^2n^2 \end{aligned}$$

$b>0$ なので，$b=2mn$ となります。

つまり，$a^2+b^2=c^2$ を満たす $a$，$b$，$c$ は

$$(a,\ b,\ c)=(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$$

であることになるわけです。

これは $a$ が奇数としたときの結論です。

$a$，$b$ には対称性がありますから，$a$ が偶数のときは

$$(a,\ b,\ c)=(2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2)$$

という結論になります。

以上から，$a$，$b$，$c$ のどの 2 つも互いに素である $a^2+b^2=c^2$ を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ の一般解（原始ピタゴラス数）は
互いに素であり，偶奇が異なり，$m>n$ を満たす自然数 $m$，$n$ を用いて

$(a,\ b,\ c)=(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ または $(2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2)$

と表せることが言えます。

「原始ピタゴラス数の一般解を求める」というのをダイレクトに聞かずに

「これが意味することは …… 分かるよね？」

と言わんばかりのところで止めているのが京大のニクいところです。

補足

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ となります。

<計算の概略>

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1 \\ &= 2\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1 \\ &= \frac{2}{1+t^2}-1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} \sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= 2\tan\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

<図形的な概略（あくまでイメージ）>

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ なので，$(-1,\ 0)$ を通って，$x$ 軸正の方向と $\dfrac{\theta}{2}$ の角をなす直線の式が $y=t(x+1)$ で与えられます。

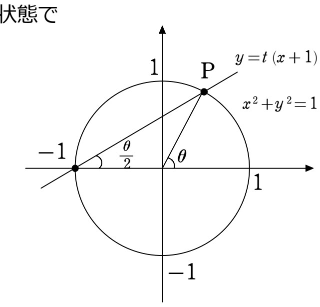
これと $x^2+y^2=1$ を連立すると $x^2+t^2(x+1)^2=1$

整理すれば $(1+t^2)x^2+2t^2x+t^2-1=0$ となります。

$x=-1$ を解にもつことが分かっているので見かけほど難しい因数分解ではありません。

ゆえに，$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$ となり，$(-1,\ 0)$ 以外の交点が $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ と得られます。この交点を P とおきます。

仕上げは円周角の定理により，右の図の状態で




$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せることから

$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

ということになります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ なので，$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$ で

これを整理すると，$(t^2-1)^2+(2t)^2=(t^2+1)^2$ という恒等式を得ます。

この恒等式において，$t=\dfrac{m}{n}$ ($m$，$n$ は互いに素な自然数) とすると

$$\left(\frac{m^2}{n^2}-1\right)^2+\left(\frac{2m}{n}\right)^2=\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right)^2$$

分母を払って整理すると

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

と，先ほどの原始ピタゴラス数の一般解の形が現れます。