2 以上の整数 m, n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。m, n を求めよ。
< '09 一橋大 >

【戦略】

与えられた不定方程式が $m^3-n^3=999\,(=3^3\cdot 37)$ **という形であり，**

$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=999\,(=3^3\cdot 37)$$

と左辺が因数分解できることから，整数問題の基本の 1 **つである**

「積の形からの約数の拾い上げ」

が狙えます。(ここまでは一直線であってほしいです。)

ここから約数を拾っていきますが，約数の個数としては
正の約数が $4\times 2=8$ **個あり，負の約数まで含めれば** $8\times 2=16$ **個あります。**

流石に，正面突破は難しいので，候補を削っていきます。
その際に意識を向ける代表例は

- **符号**
- **大小**
- **互いに素かどうか**

です。

まず，符号に関しては $m^3-n^3>0$ **ですから，** $m>n$ **であることが言えますので，** $m-n>0$ **です。**

つまり，(正の整数)×(正の整数) $=999$ **という形のみ考えればいいことになります。(まずこれで労力半減)**

さらに，大小ですが，直感的には $m-n$ **よりも** m^2+mn+n^2 **の方が大きそうです。**

実際に $(m^2+mn+n^2)-(m-n)$ **という差を考えてみると**

$$\begin{aligned}(m^2+mn+n^2)-(m-n)&=m^2+(n-1)m+n^2+n\\&=\left(m+\frac{n-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}\\&=\left(m+\frac{n-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(n+1)^2-1\\&\geqq\frac{3}{4}(n+1)^2-1\\&\geqq\frac{3}{4}(2+1)^2-1\\&=\frac{23}{4}\\&>0\end{aligned}$$

と，大小が確定しました。

これにより， 3×333 **と** 333×3 **みたいな入れ替えを考える必要がなくなるので，さらに労力が半減します。**

互いに素かどうかは言えなさそうなので，候補を削るのはここらへんで打ち切ります。

すると

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$$

と 4 **パターンを個別検証していくことになります。**

ただ，この同じような連立方程式を 4 **回繰り返すのはさすがに手が疲れますから，**

$\begin{cases} m-n=K & \cdots ① \\ m^2+mn+n^2=L & \cdots ② \end{cases}$ **と一般的に連立方程式を考えてみます。**

すると，① から $m=n+K$ **となり，これを ② に代入することで**

$$3n^2+3Kn+K^2-L=0$$

という２次方程式を得ることができますので，ここで初めて K, L **を代入すればよいでしょう。**

<u>解答</u>

与えられた等式は $m^3-n^3=999\,(=3^3\cdot 37)$

すなわち $(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\cdot 37$

ここで，$m^3-n^3>0$ なので $m^3>n^3$ であり，$m>n$

一方 m, n は 2 以上の整数なので，$m^2+mn+n^2>0$

さらに

$$\begin{aligned}(m^2+mn+n^2)-(m-n)&=m^2+(n-1)m+n^2+n\\&=\left(m+\frac{n-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2+\frac{3}{2}n-\frac{1}{4}\\&=\left(m+\frac{n-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(n+1)^2-1\\&\geqq\frac{3}{4}(n+1)^2-1\\&\geqq\frac{3}{4}(2+1)^2-1\\&=\frac{23}{4}\\&>0\end{aligned}$$

以上から，$0<m-n<m^2+mn+n^2$ であることに注意して

$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\cdot 37$ を満たす 2 以上の整数 m, n について考えると

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$$

ここで，$\begin{cases} m-n=K & \cdots ① \\ m^2+mn+n^2=L & \cdots ② \end{cases}$ とおくと，

① より，$m=n+K$ であり，これを ② に代入すると

$(n+K)^2+n(n+K)+n^2=L$ で，これを整理すると

$$3n^2+3Kn+K^2-L=0 \quad \cdots (*)$$

$(K,\ L)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$ について考える。

(i)　$(K, L)=(1, 999)$ のとき

$(*)$ より $3n^2+3n-998=0$，すなわち $3n(n+1)=998$

左辺は 3 の倍数であるが，右辺が 3 の倍数とならないため不合理。

(ii)　$(K, L)=(3, 333)$ のとき

$(*)$ より $3n^2+9n-324=0$，すなわち $n^2+3n-108=0$

よって，$(n+12)(n-9)=0$ で $n \geqq 2$ より $n=9$ を得る。

このとき $m=12$

(iii)　$(K, L)=(9, 111)$ のとき

$(*)$ より $3n^2+27n-30=0$，すなわち $n^2+9n-10=0$

よって，$(n+10)(n-1)=0$ となるが，これを満たす 2 以上の整数 n はない。

(iv)　$(K, L)=(27, 37)$ のとき

$(*)$ より $3n^2+81n+692=0$

$n \geqq 2$ なので，(左辺)>0 となり，これを満たす 2 以上の整数 n はない。

以上から求める m，n の値は $(m, n)=(12, 9)$ …答

【戦略２】

$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1, 999), (3, 333), (9, 111), (27, 37)$ 以降，

m^2+mn+n^2 というものが m，n についての対称式であることを利用していきます。

今得られているのは $m-n$，m^2+mn+n^2 という値です。

この既知の値から

$mn=\dfrac{(m^2+mn+n^2)-(m-n)^2}{3}$ と mn を無理やり作ってやります。

もう一つの基本対称式 $m+n$ については

$(m+n)^2=(m-n)^2+4mn$ と見て，先ほどの mn を代入してやると

$$
\begin{aligned}
(m+n)^2&=(m-n)^2+\frac{4(m^2+mn+n^2)-4(m-n)^2}{3}\\
&=\frac{4(m^2+mn+n^2)-(m-n)^2}{3} \quad \cdots(**)
\end{aligned}
$$

を得ることができます。

何がやりたかったかというと手元にある $\begin{cases} m-n \\ m^2+mn+n^2 \end{cases}$ という２つの値から 和と積の情報を得たかったのです。

$(m+n)^2>0$ とならなければならないことから

$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(27, 37)$ は削られます。

残った $(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1, 999), (3, 333), (9, 111)$ について

$(**)$ に代入してやると $(m+n)^2=\dfrac{4\cdot 999-1}{3}$，$\dfrac{4\cdot 333-9}{3}$，$\dfrac{4\cdot 111-81}{3}$

となりますが，分子が 3 の倍数となっていない $\dfrac{4\cdot 999-1}{3}$ が削られます。

よって，$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1, 999)$ が削られ，

$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3, 333), (9, 111)$ のみが候補です。

このとき，$(m+n)^2=441, 121$ ですから $m+n=21, 11$ となります。

あとは $\begin{cases} m-n=3 \\ m+n=21 \end{cases}$，$\begin{cases} m-n=9 \\ m+n=11 \end{cases}$ という連立方程式を考えればよくなります。

【部分的別解】

$(m-n\ ,\ m^2+mn+n^2)=(1\ ,\ 999)\ ,\ (3\ ,\ 333)\ ,\ (9\ ,\ 111)\ ,\ (27\ ,\ 37)$ 以降

$mn=\dfrac{(m^2+mn+n^2)-(m-n)^2}{3}$ であるため，

$$\begin{aligned}(m+n)^2&=(m-n)^2+4mn\\&=(m-n)^2+\frac{4(m^2+mn+n^2)-4(m-n)^2}{3}\\&=\frac{4(m^2+mn+n^2)-(m-n)^2}{3}\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

$(**)$ の値が正となる組は

$(m-n\ ,\ m^2+mn+n^2)=(1\ ,\ 999)\ ,\ (3\ ,\ 333)\ ,\ (9\ ,\ 111)$

このとき $(m+n)^2$ の値はそれぞれ

分子が3 の倍数じゃない

$$\frac{4\cdot 999-1}{3}\ ,\ \frac{4\cdot 333-9}{3}\ ,\ \frac{4\cdot 111-81}{3}$$

$(m+n)^2$ は整数なので，$(m+n)^2=441\ ,\ 121$

$$\therefore\ \ m+n=21\ ,\ 11$$

以上から $\begin{cases}m-n=3\\m+n=21\end{cases}$ ， $\begin{cases}m-n=9\\m+n=11\end{cases}$

$$(m\ ,\ n)=(12\ ,\ 9)\ ,\ (10\ ,\ 1)$$

$m>n\geqq 2$ なので，$(m\ ,\ n)=(12\ ,\ 9)$ $\cdots$ 答

【総括】

m^3-n^3 が因数分解できることから，方針自体は「積の形からの約数の拾い上げ」ということで立ちやすいでしょう。

ただし，約数の個数が多いと正面突破で全部調べるのは大変ですから，調べる前に候補を削る術や工夫をしっかりと勉強しておきましょう。

【戦略】でも述べたように

- 符号
- 大小
- 互いに素かどうか（←偶奇チェックが多い）

というところは目を向けたいポイントです。

また，【戦略２】の方針の根底にあるのは

$\begin{cases}m-n=\bigcirc\\(\text{わけわからん式})=\triangle\end{cases}$ という連立方程式よりも $\begin{cases}m-n=\bigcirc\\m+n=\square\end{cases}$ という

連立方程式の方がいいに決まってる，ということです。

ただ，試験場で再現できるかどうかと言われると再現性は高くないかもしれません。

【復習用類題】

$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 $(a\ ,\ b)$ をすべて求めよ。

＜ ’05 京都大 ＞

【略解】

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=7\cdot 31$

本来はちゃんと示すべきです。

$0<a-b<a^2+ab+b^2$ であることに注意すると

$$(a-b\ ,\ a^2+ab+b^2)=(1\ ,\ 217)\ ,\ (7\ ,\ 31)$$

$\begin{cases}a-b=K\\a^2+ab+b^2=L\end{cases}$ として a を消去した 2 次方程式を作ると

$$3b^2+3Kb+K^2-L=0\ \cdots(*)$$

$(K\ ,\ L)=(1\ ,\ 217)$ のとき $(*)$ は $3b^2+3b-216=0$

すなわち $b^2+b-72=0$ で $(b+9)(b-8)=0$

これより $(a\ ,\ b)=(-8\ ,\ -9)\ ,\ (9\ ,\ 8)$

$(K\ ,\ L)=(7\ ,\ 31)$ のとき $(*)$ は $3b^2+21b+18=0$

すなわち $b^2+7b+6=0$ で $(b+1)(b+6)=0$

これより $(a\ ,\ b)=(6\ ,\ -1)\ ,\ (1\ ,\ -6)$

以上から $(a\ ,\ b)=(-8\ ,\ -9)\ ,\ (9\ ,\ 8)\ ,\ (6\ ,\ -1)\ ,\ (1\ ,\ -6)$ $\cdots$ 答

【余談】

今回の一橋大学の問題は，ラマヌジャンの「タクシー数」と呼ばれるネタを背景としたものです。

ラマヌジャンは

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390\,n)}{(4^n\cdot 99^n\cdot n\,!)}$$

$$\frac{4}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(4n)!\,(1123+21460\,n)}{882^{\,2n+1}\,(4^n\cdot n\,!)^4}$$

など，どこから思いついたのかと思うような等式を次々と発見した直感型の天才です。

しかし，彼には証明という概念がなく、「夢でナーマギリ女神が教えてくれた」などと直感に頼りすぎていたため，後の数学者がこれらの問題を証明するのに苦労しました。

ただ，その直感力はずば抜けて鋭く，彼がいなかったらこれらの等式は発見されなかったのではないかとさえ言われています。

ハーディーという数学者に才能を見出され，ケンブリッジ大学に招聘されることになるのですが，ハーディーは証明という概念を知らないラマヌジャンに対して，下手に手を加えてラマヌジャンの直感力や才能が失われるのを恐れ，必要以上に手を加えることをしませんでした。

そんな中，イギリスでの生活に馴染めず，ラマヌジャンは療養することになります。

ある日，療養中のラマヌジャンを見舞いに来たハーディーが

「乗ってきたタクシーのナンバーは 1729 だった。たいして特徴のない数だったよ。」と言いました。

これを聞いたラマヌジャンはすぐさま

「そんなことはありません。1729 は

$$1729=12^3+1^3=10^3+9^3$$

　と２通りの立方数の和で表せる数の中で最小のものです」

と答えたそうです。

この話は，ラマヌジャンの数に対する研ぎ澄まされ方が群をぬいている一つのエピソードとして有名であり，この 1729 は「タクシー数」と呼ばれています。

※　この逸話には続きがあり，ハーディーが

「４乗数でも同様のものがあるか」

と尋ねたところ，ラマヌジャンは少し考えて

「あると思うが，大きすぎてわからない」

と答えたそうです。

実際

$$635318657=134^4+133^4=158^4+59^4$$

であることが後に確認されました。

ハーディー自身も数々の価値ある発表を繰り返してきた天才で，非常に名高い数学者ですが，そんなハーディーに

「私の最大の功績はラマヌジャンを発見したことだ」

と述べさせたことがラマヌジャンの天才ぶりを表しています。