サインカーブの３等分

曲線 $y=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積が，2 つの曲線 $y=a\sin x$，$y=b\sin x$（$0<b<a$）によって 3 等分されるとき，定数 a，b の値を求めよ。

＜ ’13 日本女子大 ＞

【戦略】

まずは状況を図示します。

面積に関する条件を立式していくことになりますが，交点の x 座標が求められません。

これについては人類レベルで求められませんから，悩む必要はありません。

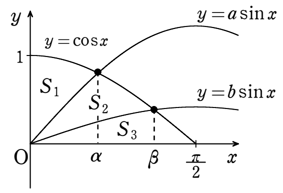
「文字でおいて」話を進めていってください。
（ここでは α，β とおいて先に進みます。）

いよいよ面積に関する条件を定積分を用いて立式していきます。

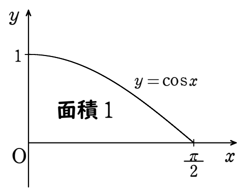
$$S_1=S_2=S_3$$

と見るのは得策ではありません。

区間によって上下の関数が変わってくるためです。



そこで



ということを利用して， $\begin{cases} S_1=\dfrac{1}{3} \\ S_1+S_2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

と見ます。この２式が成立すれば，自動的に $S_3=\dfrac{1}{3}$ が成立しますから。

このあたりのモノの見方はもっと定番の「面積の２等分問題」と同じなので，この方針を立てられるかどうかについては経験があるとスムーズです。

立式が無事に済めば，あとは「a と α の連立方程式」と「b と β の連立方程式」となります。

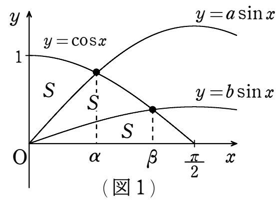
消しやすい文字から消去して処理していきます。

【解答】

（図 1）のように $y=\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

と $y=a\sin x$，$y=b\sin x$（$0<b<a$）

との交点の x 座標をそれぞれ α，β とする。



（図 1）

$\left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\cdots①\right)$

また，題意の 3 等分された面積を S とする。

$$\begin{aligned} 3S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx \\ &=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &=1 \end{aligned}$$

ゆえに，$S=\dfrac{1}{3}$

$\displaystyle\int_0^{\alpha}(\cos x-a\sin x)\,dx=S$ より，$\Big[\sin x+a\cos x\Big]_0^{\alpha}=\dfrac{1}{3}$

これより，$\sin\alpha+a\cos\alpha-a=\dfrac{1}{3}\cdots②$ を得る。

一方，$\displaystyle\int_0^{\beta}(\cos x-b\sin x)\,dx=2S$ より $\Big[\sin x+b\cos x\Big]_0^{\beta}=\dfrac{2}{3}$

これより，$\sin\beta+b\cos\beta-b=\dfrac{2}{3}\ \cdots③$

また，α，β は $\begin{cases} a\sin\alpha=\cos\alpha\ \cdots④ \\ b\sin\beta=\cos\beta\ \cdots⑤ \end{cases}$ を満たす。

①，④ より $a=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ \cdots⑥$

② に代入して a を消去すると

$\sin\alpha+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{3}$ で，両辺 $\sin\alpha$ をかけると

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\sin\alpha$ を得て，整理すると

$$\cos\alpha=1-\frac{1}{3}\sin\alpha$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\sin^2\alpha+\left(1-\dfrac{1}{3}\sin\alpha\right)^2=1$

これを整理すると $5\sin^2\alpha-3\sin\alpha=0$，すなわち $\sin\alpha(5\sin\alpha-3)=0$

① より $\sin\alpha\neq 0$ であるから，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ で，このとき $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

⑥ より $a=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$

一方，①，⑤ より $b=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$ … ⑦

③ に代入し，$\sin\beta+\dfrac{\cos^2\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}=\dfrac{2}{3}$ で，両辺 $\sin\beta$ をかけると

$\sin^2\beta+\cos^2\beta-\cos\beta=\dfrac{2}{3}\sin\beta$ を得て，これを整理すると

$$\cos\beta=1-\frac{2}{3}\sin\beta$$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より，$\sin^2\beta+\left(1-\dfrac{2}{3}\sin\beta\right)^2=1$

これを整理すると，$13\sin^2\beta-12\sin\beta=0$，すなわち

$$\sin\beta\,(13\sin\beta-12)=0$$

① より $\sin\beta\fallingdotseq 0$ であるから，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ で，このとき $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$

⑦ より $b=\dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\dfrac{5}{12}$

以上から求める a，b の値は

$$a=\frac{4}{3},\ b=\frac{5}{12}\ \cdots\ \boxed{答}$$

【総括】

面積の等分問題で，定番の部類に入るトピックスです。

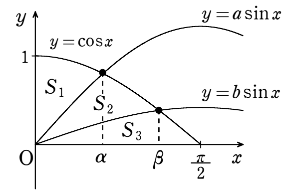
ただし，本問は 3 等分という点で目新しさがあります。

この話題の問題で大切なのは

「求められない交点は文字で置く」

という言葉で，勇気をもって文字で置いて先に進みましょう。

また，右の図において



$S_1=S_2=S_3$ と見るのではなく

$\begin{cases} S_1=\dfrac{1}{3} \\ S_1+S_2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ と見る部分については

経験がモノをいいますので，このあたりを補強するにあたってはもう少し定番の「面積の２等分Ver」を確認しておくとよいでしょう。

余談ですが，本問の途中経過から，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$ を得ました。

有名ピタゴラス数を作る角度 α，β を用いてサインカーブに関する面積を３等分できることは，恥ずかしながら本問を解いて初めて知りました。