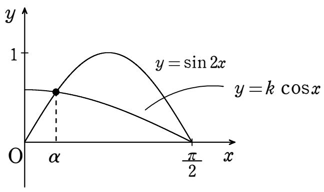
$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $C_1 : y=\sin 2x$ と曲線 $C_2 : y=k\cos x$ を考える。ただし，k は正の定数とする。

C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積を S とし，C_2 が S を２等分するとき k の値を求めよ。

＜ ’17 東京海洋大 改 ＞

【戦略】

まずは状況の把握です。

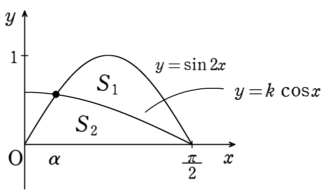


$y=\sin 2x$ **と** $y=k\cos x$
の交点が求められませんが
これは人類レベルで求められません。

勇気をもって文字で置いて先に
進んでください。
（ここでは α **とおきます。）**

面積の２等分ということをどのように立式するかですが

$S_1=S_2$ **と見るのは得策ではありません。**



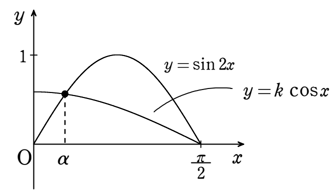
区間によって上下の関数が変わって
しまうからです。

そこで， $S_1+S_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

であることをうまく利用して， $S_1=\dfrac{1}{2}$ **であることが言えればよいでしょう。**

S_2 **にはできることなら触れたくありませんから。**

【解答】



C_1，C_2 は $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ 以外にもう一つ交点をもつ。

その交点の x 座標を α とする。
$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

α は $\sin 2x=k\cos x$ という方程式の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における解であるので，$\sin 2\alpha=k\cos\alpha$ を満たし，これは $2\sin\alpha\cos\alpha=k\cos\alpha$ と変形できる。

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\cos\alpha \neq 0$ であるから $2\sin\alpha=k$，すなわち

$$\sin\alpha=\frac{k}{2} \cdots ①$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において $0<\sin\alpha<1$ であるので，$0<\dfrac{k}{2}<1$，すなわち

$$0<k<2 \cdots ②$$

さて，面積について，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ であるので，題意を満たすためには

$$\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x-k\cos x)\,dx=\frac{1}{2}$$

となればよい。

$$\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2\alpha+k\sin\alpha+\frac{1}{2}-k=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2\alpha+k\sin\alpha-k=0$$

$$\frac{1}{2}(1-2\sin^2\alpha)+k\sin\alpha-k=0$$

$$-\sin^2\alpha+k\sin\alpha+\frac{1}{2}-k=0$$

① より，

$$-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}-k=0$$

これを整理すると，$k^2-4k+2=0$ であり，② を考えると

$$k=2-\sqrt{2} \cdots 答$$

【総括】

面積の等分問題で，定番の部類に入るトピックスです。

本問はサインカーブでしたが，放物線などの曲線に対しても同じような面積の等分問題があります。

シナリオは大きく変わりません。単純に面積が等しいと翻訳するのではなく，

全体の面積を絡めて翻訳する

のがコツです。

ちなみに本問の原文は次のようでした。

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $C_1 : y = \sin 2x$ と曲線 $C_2 : y = k\cos x$ を考える。ただし，k は定数とする。C_1 と C_2 は点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ 以外の点でも交わるとし，その x 座標を α とする。

(1) C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2) $\sin\alpha$ を k を用いて表せ。また，k の値の範囲を求めよ。

(3) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を k を用いて表せ。

(4) C_2 が S を 2 等分するとき，k の値を求めよ。

もし，本問ができなかった方は，上の原文 Ver で解きなおしてみてください。

本問のポイントである

リード文：求められない交点は文字でおく。(ここでは α とおいている)

(1)：全体の面積

(2)：α に関する情報

(3)：(【戦略】でいう) S_2 には触れない。(S_1 を考えよということ)

(4)：オチ

が丁寧な誘導としてあるので，どこに目を向ければよいのかというガイドラインとなるでしょう。

ただし，誘導に期待することなく，自力でシナリオが思い描けるようにこの話題については染み込ませてほしいと思います。

本問の原文を読んで「余計なお世話」だと思えるかどうかですね。