$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，曲線 $C_1 : y=\sin 2x$ と曲線 $C_2 : y=k\cos x$ を考える。ただし，k は定数とする。C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ 以外の点でも交わるとし，その x 座標を α とする。

(1)　C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
(2)　$\sin\alpha$ を k を用いて表せ。また，k の値の範囲を求めよ。
(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を k を用いて表せ。
(4)　C_2 が S を２等分するとき，k の値を求めよ。

＜ ’17 東京海洋大 ＞

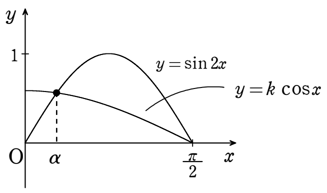
【戦略】

ほとんど言われたことをやるだけです。

【解答】

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ … 答

(2)　α は $\sin 2x = k\cos x$ という方程式の $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ における解であるので，$\sin 2\alpha = k\cos\alpha$ を満たし，これは



$$2\sin\alpha\cos\alpha = k\cos\alpha$$

と変形できる。

$0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり，$\cos\alpha \fallingdotseq 0$ であるから $2\sin\alpha = k$，すなわち

$$\sin\alpha = \frac{k}{2} \cdots 答$$

$0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin\alpha < 1$ であるので，$0 \leqq \frac{k}{2} < 1$，すなわち

$$0 \leqq k < 2 \cdots 答$$

(3)　求める面積は

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k\cos x)\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha + \frac{1}{2} - k \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\alpha) + k\sin\alpha + \frac{1}{2} - k \\ &= -\sin^2\alpha + k\sin\alpha + 1 - k \\ &= -\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{2} + 1 - k \quad (\because (2)) \\ &= \frac{k^2}{4} - k + 1 \cdots 答\end{aligned}$$

(4)　(3) で求めた面積が，(1) で求めた面積の半分である $\frac{1}{2}$ となればよい。

ゆえに，$\frac{k^2}{4} - k + 1 = \frac{1}{2}$ で，これを整理すると $k^2 - 4k + 2 = 0$

(2) より，$0 \leqq k < 2$ なので，$k = 2 - \sqrt{2}$ … 答

【総括】

面積の等分問題で，定番の部類に入るトピックスです。

本問のポイントである

リード文：求められない交点は文字でおく。(ここでは α とおいている)
(1)：全体の面積
(2)：α に関する情報
(3)：（面積について）考えやすいほうを考えよ
(4)：オチ

が丁寧な誘導としてあるので，どこに目を向ければよいのかというガイドラインとなるでしょう。

ただし，誘導に期待することなく，自力でシナリオが思い描けるようにこの話題については染み込ませてほしいと思います。