$k>0$ とする。xy 平面上の 2 曲線

$$y=k(x-x^3)$$
$$x=k(y-y^3)$$

が第 1 象限に $\alpha \fallingdotseq \beta$ なる交点 $(\alpha,\ \beta)$ をもつような k の範囲を求めよ。

＜ '89 東京大 ＞

【戦略 1】

グラフを考えて図形的にどうこうできるレベルではありません。
基本的に曲線と曲線の位置関係は直感が通じないこともあるため，危険です。
なので，式に頼ることになります。

対称性のある式は対称性を崩さないことを心がけて変形しましょう。

1 文字消去が頭をよぎった人もいるかと思いますが，例えば y を消去すると x の 9 次方程式が出てきてしまいます。(冗談じゃありません)

9 次方程式を覚悟して 1 文字消去の路線でいく方針は 【 解 2 】で考えたいと思います。

ここでは，$x \fallingdotseq y$，$x>0$，$y>0$ という条件のもとで

$$\begin{cases} y=k(x-x^3) \\ x=k(y-y^3) \end{cases}$$

という２式を同値変形していきます。

対称性を崩さないような操作を念頭におき，辺々の和，差を考えていきます。

本来なら五月蝿い議論になる同値変形ですが，$x \fallingdotseq y$，$x>0$，$y>0$ ということをことわることにより，比較的スムーズに（手なりに）進めることができると思います。

【解 1】

$x \fallingdotseq y$，$x>0$，$y>0$ のもとで，

$$\begin{cases} x+y=k(x+y-x^3-y^3) \\ y-x=k(x-y-x^3+y^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=k(x+y)\{1-(x^2-xy+y^2)\} \\ y-x=k(x-y)\{1-(x^2+xy+y^2)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1=k\{1-(x^2-xy+y^2)\} \\ -1=k\{1-(x^2+xy+y^2)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-xy+y^2=1-\dfrac{1}{k} \ \cdots ① \\ x^2+xy+y^2=1+\dfrac{1}{k} \ \cdots ② \end{cases}$$

①＋② より，$2x^2+2y^2=2$ で，$x^2+y^2=1$

②－① より，$2xy=\dfrac{2}{k}$ で，$xy=\dfrac{1}{k}$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=1+\frac{2}{k}$$
$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=1-\frac{2}{k}$$

$x>0$，$y>0$ より，$\begin{cases} x+y=\sqrt{1+\dfrac{2}{k}} \\ x-y=\pm\sqrt{1-\dfrac{2}{k}} \end{cases}$

これら 2 式より，

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}\pm\sqrt{1-\frac{2}{k}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}}\mp\sqrt{1-\frac{2}{k}}\right)\right) \text{（複号同順）}$$

これが 2 曲線 $\begin{cases} y=k(x-x^3) \\ x=k(y-y^3) \end{cases}$ の交点である。

これが第 1 象限にあるためには，$x>0$，$y>0$ より

$\sqrt{1+\dfrac{2}{k}}>\sqrt{1-\dfrac{2}{k}}$ かつ $1-\dfrac{2}{k}>0$

まとめると，$\begin{cases} 1+\dfrac{2}{k}>1-\dfrac{2}{k}>0 \ \cdots ③ \\ k>0 \ (\leftarrow \text{条件}) \cdots ④ \end{cases}$

④ が成り立つとき，③ における左側の不等式は自ずと成り立つ。

ゆえに，③ の右側の不等式を考えればよく，$1-\dfrac{2}{k}>0$ を考えればよい。

$\dfrac{2}{k}<1$ で，$k>0$ であるから $k>2$ …答

【戦略 2】

9 次方程式を覚悟して 1 文字消去路線でいく場合 , 2 曲線 $\begin{cases} y=k(x-x^3) \\ x=k(y-y^3) \end{cases}$ **が 直線** $y=x$ **に関して対称となることを上手く利用します。**

$y=k(x-x^3)$ **と** $y=x$ **を連立して** y **を消去すると ,** $x=k(x-x^3)$ **となり ,** $x(kx^2-k+1)=0$ **と変形できます。**

このことから , この 2 曲線を連立したときの 9 次式が x **,** kx^2-k+1 **を因数にもつことを念頭におき, 出てくる 9 次方程式が「因数分解できるはず」と身構えておくことができれば, 完答が現実味を帯びてきます。**

【解 2】

与えられた 2 曲線の式を連立して y を消去すると

$x=k\{k(x-x^3)-k^3(x-x^3)^3\}$

$x\{k^4x^8-3k^4x^6+3k^4x^4-(k^4+k^2)x^2+(k^2-1)\}=0$

$k^2=K$ とおくと , $x\{(x^8-3x^6+3x^4-x^2)K^2-(x^2+1)K-1\}=0$

$x\{x^2(x^2-1)^3K^2-(x^2+1)K-1\}=0$

次数の低い文字について整理しました。

$x\{(x^2-1)^2K-1\}\{x^2(x^2-1)K+1\}=0$

$x\{(x^2-1)^2k^2-1\}\{x^2(x^2-1)k^2+1\}=0$

$x\{k(x^2-1)+1\}\{k(x^2-1)-1\}\{k^2x^2(x^2-1)+1\}=0$

$x(kx^2-k+1)(kx^2-k-1)(k^2x^4-k^2x^2+1)=0$

よって , 交点の x 座標は

$$x=0\ ,\ x^2=\frac{k-1}{k}\ ,\ \frac{k+1}{k}\ ,\ k^2x^4-k^2x^2+1=0$$

のいずれかを満たす。

$x^2=\dfrac{k-1}{k} \iff \begin{cases} x=k(x-x^3) \\ x\neq 0 \end{cases}$ であるので , これは $y=k(x-x^3)$ と $y=x$ の交点の一部であり , 不適。

また , 交点が第 1 象限に存在するとき , $y=k(x-x^3)$ のグラフを考えると , 交点の x 座標は $0<x<1$ の範囲にあり , $0<x^2<1$ である。

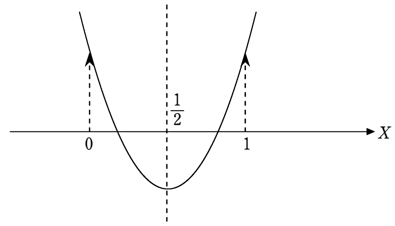
ゆえに , $x=0$, $x^2=\dfrac{k+1}{k}$ $\left(=1+\dfrac{1}{k}>1\right)$ は不適。

$k^2\neq 0$ より , x^2 についての 2 次方程式 $k^2x^4-k^2x^2+1=0$ について

$x^2=X$ とおき , $f(X)=k^2X^2-k^2X+1$ とおくと ,

$$f(0)=1>0$$
$$f(1)=1>0$$
$$y=f(X) \text{ の軸が } X=\frac{1}{2}$$

であることに注意すると



グラフから , $k^2X^2-k^2X+1=0$ が実数解をもつならば , 必然的に $0<X<1$, すなわち $0<x^2<1$ となる。

よって , $f(X)=0$ の判別式を D として , $D>0$ となることが必要十分条件。

$D=k^4-4k^2=k^2(k+2)(k-2)$ より , $k^2(k+2)(k-2)>0$

$k>0$ より , $k^2>0$, $k+2>0$ だから , $k-2>0$ となればよく ,

$$k>2 \ \cdots \text{答}$$

【戦略３】

マニアックな部類に入りますからあまり参考にならないかもしれませんが $x-x^3$ **という式では** $x=\cos\theta$ **という置換が有効という経験がある人からすると , 本問はグッと計算量が抑えられます。**

ただ , $x=\cos\theta$ **と置換するからには** $|x|\leqq 1$ **であることを言わなければいけません。**

与えられた 2 曲線が , x , y について対称であることを活かしながら , 与えられた 2 曲線の式を辺々割り算すると , $x^2+y^2=1$ **という式を手に入れることができますので, そこから上記の置換で攻め落としていきます。**

【解 3】

$$y=k(x-x^3)\cdots①$$
$$x=k(y-y^3)\cdots②$$

$x>0$，$y>0$，$k>0$，$x\fallingdotseq y$ の下で，①÷② から $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x-x^3}{y-y^3}$

整理すると，$x^4-y^4=x^2-y^2$ なので，$x^2+y^2=1$

つまり，題意の第 1 象限の交点 $(x,\ y)$ が存在するとしたら，$x^2+y^2=1$ を満たすので

$$(\cos\theta,\ \sin\theta)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおける。

ゆえに，

$$\begin{cases}\sin\theta=k(\cos\theta-\cos^3\theta)\cdots③\\ \cos\theta=k(\sin\theta-\sin^3\theta)\cdots④\\ \cos\theta\fallingdotseq\sin\theta\ \cdots⑤\end{cases}$$

を全て満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在するような k の範囲を求めればよい。

③ より，

$$\sin\theta=k\cos\theta(1-\cos^2\theta)$$
$$=k\sin^2\theta\cos\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$1=k\sin\theta\cos\theta$ で，$\sin 2\theta=\dfrac{2}{k}$ を得る。

④ より，

$$\cos\theta=k\sin\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=k\sin\theta\cos^2\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$1=k\sin\theta\cos\theta$ で，$\sin 2\theta=\dfrac{2}{k}$ を得る。

⑤ より $\theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{4}$

以上から，③，④，⑤ をすべて満たす θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で存在するための条件は

$\sin 2\theta=\dfrac{2}{k}$ を満たす θ が $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{4}\right)$ の範囲で存在する

ということであり，$0<2\theta<\pi$，$2\theta\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2}$ であることを考えると，
求める条件は

$$0<\frac{2}{k}<1$$

$k>0$ なので，左側の不等式は必ず成り立ち，$\dfrac{2}{k}<1$ を満たせばよい。

$k>0$ より，$k>2$ …答

【総括】

図形的に攻めるのか，式で攻めるのかという判断で，グラフ的処理を試みようとする受験生も多いと思います。

しかし，曲線と曲線の状態がどうなっているのかというのは，自分の思い込みによって都合よく捉えてしまい，見落としが多くなりがちで危険です。

要するに
「あなたの絵が下手くそなだけで実はこうなっている可能性はないの？」
などと突っ込まれる隙を与えかねないということです。
（直線という曲がっていない（紛れがない）ものについてはいいのですが）

なので，本問は式に頼って処理を進めていきました。

【解 1】からは対称性のある式の扱い方と，同値性についての理解

【解 2】からは $y=x$ について対称だという図形的性質を，因数分解の際の因数発見という式的特徴に結びつける力

【解 3】からは $x-x^3$ という式において $x=\cos\theta$ とおくことの有効性

などを教訓として学んでいただければと思います。