a，b が異なる正の数であるとき，次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\log a-\log b}<\frac{a+b}{2}$$

＜ '92 大阪教育大　'97 岐阜大 ＞

【戦略】

勉強していれば平均値の定理が目に付く形です。

それを連想して示すべき不等式を

$$\frac{2}{a+b}<\frac{\log a-\log b}{a-b}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

と逆数をとって見てみます。

対称性から $0<b<a$ として考えて一般性を失いません。

$f(x)=\log x$ **とすると，$b<x<a$ の範囲で $f(x)$ は微分可能なので，平均値の定理より**

$\dfrac{\log a-\log b}{a-b}=f'(c)$ $(b<c<a)$ **となる c が存在する**

これより $\dfrac{\log a-\log b}{a-b}=\dfrac{1}{c}$ **かつ** $b<c<a$

ゆえに $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}$ **から** $\dfrac{1}{a}<\dfrac{\log a-\log b}{a-b}<\dfrac{1}{b}$ **を得ます。**

ここで， $\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{\log a-\log b}{a-b}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ **と言えれば問題ないのですが，**

$\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a+b}=\dfrac{b-a}{a(a+b)}<0$ **なので，実際には** $\dfrac{1}{a}<\dfrac{2}{a+b}$ **となり，失敗します。**

右側も $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-\sqrt{ab}}{b\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{b}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{b\sqrt{ab}}<0$ **となり，これまた失敗します。**

つまり，示すべき不等式は平均値の定理から得られる不等式よりも，より精度の高い不等式なのです。平均値の定理に固執していても無駄だということが分かりました。

なので，平均値の定理からのアプローチはここで捨てる決断をしましょう。（それだけでも一歩前進）

平均値の定理を捨て，じゃあどうするかということになりますが，もっと基本に立ち返って，a，b という２変数の扱いの基本「独立か従属か」を見ます。

今回 a，b は独立２変数なので，「1つを変数，他を定数」という，予選決勝法というセオリーに従った解法でいくことにします。

解答

対称性から $0<b<a$ として考えて一般性を失わない。

示すべき不等式は

$$\frac{2}{a+b}<\frac{\log a-\log b}{a-b}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$a-b>0$ より

$$\frac{2(a-b)}{a+b}<\log a-\log b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$$

この一手間が後の微分を楽にします。

すなわち $2-\dfrac{4b}{a+b}<\log a-\log b<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

$0<b<a$ のとき，これが成り立つことを証明すればよい。

$(\log a-\log b)-\left(2-\dfrac{4b}{a+b}\right)$ を b を固定して a の関数と見て $f(a)$ とする。

$$\begin{aligned}f'(a)&=\frac{1}{a}-\frac{4b}{(a+b)^2}\\&=\frac{(a-b)^2}{a(a+b)^2}\geqq 0\end{aligned}$$

a	(b)	$\cdots$
$f'(a)$	0	$+$
$f(a)$	0	$\nearrow$

これより，$b<a$ の範囲で，$f(a)>f(b)=0$

一方，$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)-(\log a-\log b)$ を b を固定して a の関数と見て $g(a)$ とする。

$$\begin{aligned}g'(a)&=\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}-\frac{1}{a}\\&=\frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}\sqrt{b}}\\&=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2a\sqrt{a}\sqrt{b}}\geqq 0\end{aligned}$$

a	(b)	$\cdots$
$g'(a)$	0	$+$
$g(a)$	0	$\nearrow$

これより，$b<a$ の範囲で，$g(a)>g(b)=0$

以上から $0<b<a$ のとき，$2-\dfrac{4b}{a+b}<\log a-\log b<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ が成り立つことが示され，題意も示された。

【戦略２】

同次式（斉次式）の扱いの経験があると，$\dfrac{a}{b}$ $\left(\text{あるいは}\dfrac{b}{a}\right)$ を塊と見て

1 変数に文字を減らせることができると思います。

例えば，$\dfrac{2a^2+3b^2}{a^2+ab+b^2}$ などは分母・分子を a^2 で割ると $\dfrac{2+3\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{1+\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$

で，$\dfrac{b}{a}=t$ などとおけば $\dfrac{2+3t^2}{1+t+t^2}$ と 1 変数化できます。

（これは分母・分子の各項が全て２次という同次式の性質）

別解

対称性から $0<b<a$ として考えて一般性を失わない。

示すべき不等式の辺々を $b\ (>0)$ で割ると

$$\sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\log\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2}$$

$\dfrac{a}{b}=t\ (t>1)$ とおくと，$\sqrt{t}<\dfrac{t-1}{\log t}<\dfrac{t+1}{2}$

解答 同様，後の微分が楽になるように変形します。１変数の場合は $\log t$ は単独でいてほしいものです。

辺々正の値なので，

$$\frac{2}{t+1}<\frac{\log t}{t-1}<\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$t>1$ なので，辺々 $t-1\ (>0)$ をかけると，$\dfrac{2(t-1)}{t+1}<\log t<\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$

すなわち

$$2-\frac{4}{t+1}<\log t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\quad\cdots(*)$$

よって，$t>1$ で $(*)$ が成り立つことを示せばよい。

$f(t)=\log t-\left(2-\dfrac{4}{t+1}\right)$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0\ (\because\ t>1)$$

よって，$t>1$ の範囲で $f(t)$ は単調増加なので，$f(t)>f(1)=0$

ゆえに，$2-\dfrac{4}{t+1}<\log t$ が示された。

一方，$g(t)=\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)-\log t$ とおくと

$$g'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}-\frac{1}{t}=\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}>0\quad(\because\ t>1)$$

よって，$t>1$ の範囲で $g(t)$ は単調増加なので，$g(t)>g(1)=0$

ゆえに $\log t<\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ が示された。

以上より，$t>1$ で $(*)$ が成り立つことが示され，題意も示された。

【総括】

平均値の定理が目につく形で，すかさず飛びついた人も多いでしょう。

そこで失敗してメンタルが揺さぶられた人も多いと思います。

（形から飛びついて失敗したときのダメージは大きいですものね）

さらにこの問題は

相加平均・相乗平均・傾きの逆数

など，いかにも「何かあり気」な設定であるため，「何かあるのでは？」と変に疑ってしまい，凝ったことをしようとしてしまいまねません。

そこから右往左往して万策つきてしまったという人も少なくないでしょう。

そこからのリカバリー策として，第１の方針はやはり独立２変数に注目した予選決勝法です。

ただ，その際，後の微分が楽になるように，示すべき不等式を変形してなるべく簡単な不等式に直してから証明するぐらいの工夫はしたいところです。

また，式の形から，$\dfrac{a}{b}$ あるいは $\dfrac{b}{a}$ を塊と見て 1 文字を減らすことができると見抜ければ，それは結構な熟練者です。

同次式（斉次式）については，経験があっても「言われてみれば」となることが多いですから。