正の数 x，y に対して $x^2+y+\dfrac{4}{xy}\geqq 5$ が成り立つことを示せ。
また，等号を成り立たせる x，y を求めよ。

＜ '90 東京都立大 ＞

【戦略１】
左辺については独立２変数関数ですから，セオリー通り
「１つを変数，他を定数」
という格言に従い，予選決勝法で仕留めます。

不等式の証明ですが，実質的には左辺の最小値が５となることを示す最小値問題です。

解答

左辺の $x^2+y+\dfrac{4}{xy}$ について，x を固定して $f(y)=y+\dfrac{4}{xy}+x^2\ (y>0)$ とおく。

$$f'(y)=1-\frac{4}{xy^2}=\frac{xy^2-4}{xy^2}=\frac{(\sqrt{x}y+2)(\sqrt{x}y-2)}{xy^2}$$

y	(0)	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$\cdots$
$f'(y)$		$-$	0	$+$
$f(y)$		↘		↗

よって，$f(y)\geqq f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$ $\left(\text{等号成立は } y=\dfrac{2}{\sqrt{x}} \text{ のとき}\right)$ …①

ここで，
$$f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{x}}}+x^2=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}+x^2=x^2+4x^{-\frac{1}{2}}$$

これを $g(x)$ とおく。

$$g'(x)=2x-2x^{-\frac{3}{2}}=2x\left(1-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	5	↗

よって，$g(x)\geqq 5$，すなわち $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\geqq 5$ …②

①，② より，$f(y)\geqq f\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\geqq 5$，すなわち $x^2+y+\dfrac{4}{xy}\geqq 5$ が成立する。（証明終了）

等号成立は $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ かつ $x=1$ のとき，すなわち

$x=1,\ y=2$ のとき …答

【戦略２】
形から相加平均・相乗平均をインスピレーションする人もいるでしょうが，その場合は少々工夫が必要です。

別解

$x>0,\ y>0$ から，$x^2>0$，$\dfrac{y}{2}>0$，$\dfrac{2}{xy}>0$ であり，
相加平均・相乗平均の関係から

$$x^2+y+\frac{4}{xy}=x^2+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{xy}\geqq 5\sqrt[5]{x^2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{2}{xy}\cdot\frac{2}{xy}}=5$$

この工夫は経験が必要でしょう。

となり，$x^2+y+\dfrac{4}{xy}\geqq 5$ が成り立つ。（証明終了）

また，等号が成り立つとき

$$x^2=\frac{y}{2}\ \cdots(\text{ア})\quad \text{かつ}\quad \frac{y}{2}=\frac{2}{xy}\ \cdots(\text{イ})$$

（ア）より，$y=2x^2$

（イ）に代入し，$x^2=\dfrac{2}{2x^3}$，すなわち $x^5=1$

$x>0$ より $x=1$ で，このとき $y=2$

よって，等号成立は $x=1,\ y=2$ のとき。…答

【総括】

ストレートな方針としては左辺の最小値が５となることを示す 解答 の方針でしょう。

左辺は独立な２変数関数ですから，その最大最小を扱う有力な方針は予選決勝法です。

また，形から相加平均・相乗平均の関係をインスピレーションするかもしれませんが，単純な適用はできません。

すなわち

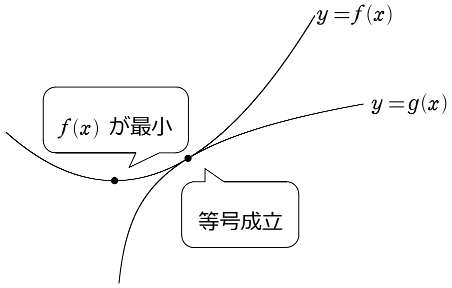
$$x^2+y+\frac{4}{xy}\geqq x^2+2\sqrt{y\cdot\frac{4}{xy}}=x^2+4\sqrt{\frac{1}{x}}$$

などのようにするのは危険です。

不等号から最大最小を言う場合は必ず等号成立について言及する必要があります。
（０点以上だから最低点が０点，１００点以下だから最高点が１００点とは限りませんよね。）

さらに，左辺と右辺に変数が残る場合，例えば $f(x) \geqq g(x)$ が常に成立しているとしても，

等号が成立するときが最小になるとは限りません



したがって，不等式から最大最小を求める場合は，基本的には

$f(x) \geqq m$ や $f(x) \leqq M$（m や M は定数）

などという形にすることが求められるのです。

したがって，本問において，相加平均・相乗平均の関係を用いようと思うと，x^2 を消すために分母に x を 2 つ分用意する必要があります。

$x^2+y+\dfrac{4}{xy}$ を $x^2+y+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{xy}$ と見ます。

今度は分母に y が 2 つできてしまいましたから y を分割して

$x^2+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{xy}$ と見ることになります。

ただし，５文字の相加平均・相乗平均を証明なしで用いてよいかどうかは微妙です。（たぶん大丈夫だとは思いますが，責任はもてません。）

２文字Ｖｅｒは教科書に載っているので，証明なしで使ってよいです。

心配なら n 文字の相加相乗平均の関係を証明できるようにしておきましょう。
（それ自体が問題になることもあり得る）

x_1，x_2，$\cdots$，x_n を正の実数とするとき，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

が成り立つことを示してみます。

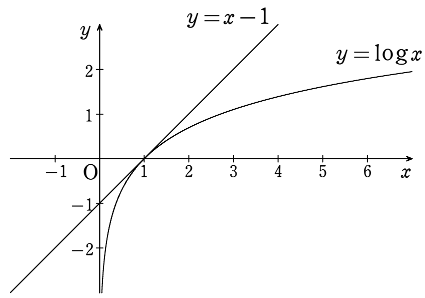
鍵は $\log x \leqq x-1$（$x>0$）という有名不等式です。

（等号成立は $x=1$ のとき）

証明

$x>0$ のとき，$\log x \leqq x-1$ が成立する。（等号成立は $x=1$ のとき）

※この証明は各自に任せますが，グラフ的には



となります。

$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=X$ とおくと，$x_1x_2\cdots x_n=X^n$ $\cdots(*)$

$$\log\frac{x_1}{X} \leqq \frac{x_1}{X}-1$$

$$\log\frac{x_2}{X} \leqq \frac{x_2}{X}-1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\log\frac{x_n}{X} \leqq \frac{x_n}{X}-1$$

辺々加えて $\log\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{X^n} \leqq \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{X}-n$

$(*)$ より $\log 1 \leqq \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{X}-n$，すなわち $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{X} \geqq n$

よって，$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq X$（$=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$）

等号成立は，$\dfrac{x_1}{X}=\dfrac{x_2}{X}=\cdots\cdots=\dfrac{x_n}{X}=1$，すなわち

$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ のとき