xy 平面上の領域

$$D : 1 \leqq x \leqq 4\,,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

を，y 軸に平行な $n-1$ 本の直線

$x = a_k$ （$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ 1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < 4$）

により分割し，D の面積を n 等分する。$a_n = 4$ として，極限

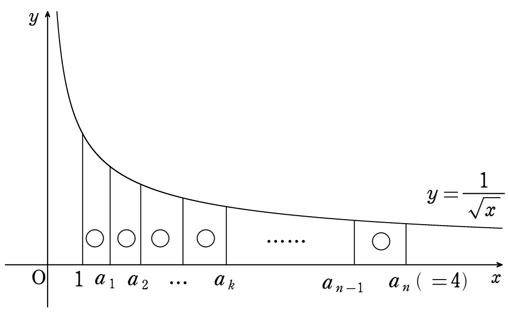
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

を求めよ。

＜ '01 東北大 ＞

【戦略】

状況を把握するために，まずは図示します。



勘違いしてはいけないこととしては「面積を等分している」ということであり，幅が等分されているわけではないということです。

今回の部分和である $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ を扱うにあたり，

一般項である $\frac{1}{\sqrt{a_k}}$ を何とか立式したいところです。

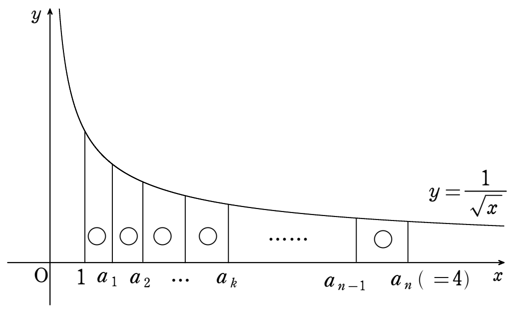
面積を n 等分していることから

$$\int_1^{a_k} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{\underbrace{\left(\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right) \times \frac{1}{n}}_{\text{○1 個分の面積}}\right\} \times k$$

と翻訳すれば，$\sqrt{a_k}$ についての式が Get できます。

すると区分求積法が目に見える形が現れてきますので，あとは手なりに進めていくだけです。

解答



D の面積が n 等分されているので

$$\int_1^{a_k} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{\left(\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right) \times \frac{1}{n}\right\} \times k$$

これより

$$\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{a_k} = \frac{k}{n}\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4$$

$$2\sqrt{a_k} - 2 = \frac{2k}{n}$$

$$\sqrt{a_k} = \frac{k}{n} + 1$$

を得る。

ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \\ &= \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 \\ &= \log 2 \ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

【総括】

雑味が少なく，シンプルに条件を立式して区分求積法を運用する良問です。

区分求積法のシグナルとなる $\frac{k}{n}$ というものが，条件を立式する中で徐々に匂ってくるあたりも教育的なレベルだと思いました。