自然数を2個以上の連続する自然数の和で表すことを考える。
例えば，42 は $3+4+\cdots\cdots+9$ のように2個以上の連続する自然数の和で表せる。

(1) 2020 を2個以上の連続する自然数の和で表す表し方を全て求めよ。

(2) a を0以上の整数とするとき，2^a は2個以上の連続する自然数の和で表せないことを示せ。

(3) a，b を自然数とするとき，$2^a(2b+1)$ は2個以上の連続する自然数の和で表せることを示せ。

＜ '15 横浜国立大 ＞

【戦略】

まずは連続自然数の和を
$$S=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)$$
とでも表します。

これは $S=(m+1)n+\dfrac{m(m+1)}{2}$ **と変形できます。**

分母を払って整理すれば，$(m+1)(2n+m)=2S$ **という式を得られます。**

(1) $S=2020$ **のときを考えることになりますから**
$$(m+1)(2n+m)=4040\ (=2^3\cdot5\cdot101)$$
という式を考えることになります。

約数が多いため，全てしらみつぶすのは少し億劫です。

無駄な候補を削るためによく使う着眼点は $\begin{cases}\text{符号}\\ \text{大小}\\ \text{偶奇}\end{cases}$ **です。**

まず符号ですが，$\begin{cases}m+1>0\\ 2n+m>0\end{cases}$ **なので，(負の数)×(負の数) というタイプは考えなくてもよいですね。**

次に大小ですが，$m+1<m+2n$ **であることから，さらに労力は半分になります。**

また，偶奇については和(もしくは差)を考えてみると
$$(m+1)+(2n+m)=2(n+m)+1\ (=\text{奇数})$$
なので，$m+1$，$2n+m$ **の偶奇は異なることになります。**
→これはすなわち素因数2は，"かたまる" ことを意味します。

あとは，$m+1$ **が素因数2をもっているかどうかを基準に場合分けすればよいでしょう。**

(2) $S=2^a$ **のときを考えます。**
$$(m+1)(2n+m)=2^{a+1}$$
を得ますが，$m+1$，$2n+m$ **の偶奇は異なるということから，どちらかは奇数です。**

しかし，$m+1$，$2n+m$ **は素因数2しかもたないことから，この奇数というのは1となるしかありません。**

どちらが1となるかについては小さいほうの $m+1$ **ということになりますが，これより** $m+1=1$ **，すなわち** $m=0$ **となり** m **が自然数ということに反してしまいます。**

(3) $S=2^a(2b+1)$ **のときを考えます。**
$$(m+1)(2n+m)=2^{a+1}(2b+1)$$
を満たす n，m **が1組でも見つかれば題意を示したことになります。**

解くのではなく，「見つければよい」と考え，ラフに考えます。

$m+1$，$2n+m$ **のどちらかに素因数2がかたまることを考えると**

$$\begin{cases}m+1=2^{a+1}\\ 2n+m=2b+1\end{cases}\qquad\begin{cases}m+1=2b+1\\ 2n+m=2^{a+1}\end{cases}$$

などという振り分け方が考えられます。

前者から $(n,\ m)=(b-2^a+1,\ 2^{a+1}-1)$

後者から $(n,\ m)=(2^a-b,\ 2b)$

を得ます。これらの n，m **が自然数として存在するための条件は**

前者の場合 $2^a\leqq b$ **，後者の場合** $2^a>b$

と，きれいに排反な場合に分けられますから，逆算的に $2^a>b$ **のときと** $2^a\leqq b$ **のときで場合分けすればよいでしょう。**

解答

n，m を自然数として，
$$S=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)$$
$$=(m+1)n+\frac{m(m+1)}{2}$$
とおく。

このとき，
$$2(m+1)n+m(m+1)=2S$$
$$\Leftrightarrow\quad (m+1)(2n+m)=2S\ \cdots(*)$$

また，$(m+1)+(2n+m)=2(n+m)+1$（＝奇数）なので
$m+1$，$2n+m$ の偶奇は異なる …①

また，$m+1<m+2n$ …②

(1) $S=2020$ のときを考える。

$(*)$ より $(m+1)(2n+m)=4040\ (=2^3\cdot5\cdot101)$

(i) m が偶数のとき

$m+1$ は3以上の奇数なので，①，② に注意すると
$$\begin{cases}m+1=5\\ 2n+m=2^3\cdot101\end{cases}$$

これより，$(n,\ m)=(402,\ 4)$

(ii) m が奇数のとき

$m+1$ は偶数なので，①，② に注意すると

$$\begin{cases}m+1=2^3\\ 2n+m=5\cdot101\end{cases}\quad\text{または}\quad\begin{cases}m+1=2^3\cdot5\\ 2n+m=101\end{cases}$$

これより，$(n,\ m)=(249,\ 7)\quad(31,\ 39)$

以上から 2020 を 2 個以上の連続自然数の和で表すと

$$\begin{cases} 402+403+404+405+406 \\ 249+250+251+252+253+254+255+256 \\ 31+32+33+\cdots+69+70 \end{cases} \quad \cdots \boxed{答}$$

(2)　$S=2^a$（a は非負整数）のときを考える。

(*) より　$(m+1)(2n+m)=2^{a+1}$　…③

① より，$m+1$，$2n+m$ のどちらか一方は奇数だが，③ よりその奇数は 1 でなければならない。

② より，$m+1=1$ だが，$m=0$ となり，m が自然数であることに反する。

よって，③ を満たす自然数 n，m は存在せず，2^a は 2 個以上の連続自然数の和で表せない。

(3)　$S=2^a(2b+1)$（a，b は自然数）のときを考える。

(*) より $(m+1)(2n+m)=2^{a+1}(2b+1)$ …④

これを満たす n，m の組を 1 組でも見つければ題意を示したことになる。

(Ⅰ)　$2^a>b$ のとき

④ を満たす自然数 n，m の組として，$\begin{cases} m+1=2b+1 \\ 2n+m=2^{a+1} \end{cases}$

すなわち，$(n, m)=(2^a-b, 2b)$ が存在する。

(Ⅱ)　$2^a \leqq b$ のとき

④ を満たす n，m の組として，$\begin{cases} m+1=2^{a+1} \\ 2n+m=2b+1 \end{cases}$

すなわち，$(n, m)=(b-2^a+1, 2^{a+1}-1)$ が存在する。

以上から題意は示された。

【総括】

しばしばネタにされる問題です。

連続自然数の和で表される形，表せない形というのは本問を通じて一度は経験したり考えてみたい話題です。

ちなみに

$2020=404+404+404+404+404$　のように奇数個 に分割できれば

-2　-1　$+1$　$+2$

$404+404+404+404+404$

⇩

$402+403+404+405+406$

のように連続和でかけます。

ただし，

-50　-49　$+49$　$+50$

$20 + 20 + \cdots\cdots +20 + 20$

⇩

$-30 - 29 - \cdots\cdots +69 +70$

のようにあまり細かく分割しすぎるとスタートが負となってしまいます。

偶数個のときは

505 + 505 + 505 + 505

252 253　251 254　250 255　249 256

と見ます。

そう考えると，$S=2^a$ のときは $2^{\bigcirc}\times 2^{\triangle}$ としか分割できません。

奇数個に分けることもできなければ，$2^{\bigcirc}+2^{\bigcirc}+\cdots\cdots+2^{\bigcirc}$

N　$N+1$ と分けることもできません。

和が奇数

もちろん数が多ければこのような分割を手あたり次第探すわけにはいかないので，$\boxed{解答}$ のように式に頼ることになります。

ただ，上記のような視点があれば「解答のこの部分は上記のここの由来のものだな」と，有機的に見えてくるでしょう。