絶対値付きのシグマによる関数

実数 x についての関数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{99}|x-k|$$

の最小値を求めよ。

＜ '10 産業医科大 ＞

【戦略】

$f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots\cdots+|x-99|$ **について，各項の絶対値を外そうと思うと**

$x\leqq 1$ のとき … $-(x-1)-(x-2)-\cdots-(x-99)$

$1\leqq x<2$ のとき … $(x-1)-(x-2)-(x-3)-\cdots-(x-99)$

$2\leqq x<3$ のとき … $(x-1)+(x-2)-(x-3)-(x-4)-\cdots-(x-99)$

$\vdots$

$\vdots$

$98\leqq x<99$ のとき … $(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-98)-(x-99)$

$x\geqq 99$ のとき … $(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-98)+(x-99)$

と場合分けすることになります。

こうしてみると

区間の前半の方は，x の係数が負なので減少し，区間の後半は x の係数が正であるので増加することが読み取れます。

減少から増加に転じるところを捉えれば，それが求める最小値です。

そこで，上の実験を一般化して

$m\leqq x<m+1$ **のときの $f(x)$ の式を立てて，その傾きに注目してみたいと思います。**

そして，最後に $x<1$ のケースと $x\geqq 99$ のケースについてふれておけばよいでしょう。

解答

$m=1，2，\cdots，98$ とする。

区間 $m\leqq x<m+1$ において

$$|x-k|=\begin{cases} x-k & (k=1，2，\cdots，m) \\ -(x-k) & (k=m+1，m+2，\cdots，99) \end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{k=1}^{m}(x-k)-\sum_{k=m+1}^{99}(x-k) \\ &=mx-\frac{m(m+1)}{2}-\left(\sum_{k=1}^{99}(x-k)-\sum_{k=1}^{m}(x-k)\right) \\ &=mx-\frac{m(m+1)}{2}-\left\{99x-\frac{99\cdot 100}{2}-mx+\frac{m(m+1)}{2}\right\} \\ &=(2m-99)x-m(m+1)+4950 \end{aligned}$$

$m=1，2，\cdots，49$ で，$f(x)$ の傾きは負である。

$m=50，51，\cdots，98$ で，$f(x)$ の傾きは正である。

つまり

$1\leqq x<2，2\leqq x<3，\cdots，49\leqq x<50$ の各区間で $f(x)$ は減少し，

$50\leqq x<51，51\leqq x<52，\cdots，98\leqq x<99$ の各区間で $f(x)$ は増加する。

また，

$x<1$ において $f(x)=-(x-1)-(x-2)-\cdots\cdots-(x-99)$ は減少関数。

$x\geqq 99$ において $f(x)=(x-1)+(x-2)+\cdots\cdots+(x-99)$ は増加関数

以上から，求める最小値は $m=50$ のときの $f(50)$ であり

$$50-50\cdot 51+4950=2450 \quad \cdots \text{答}$$

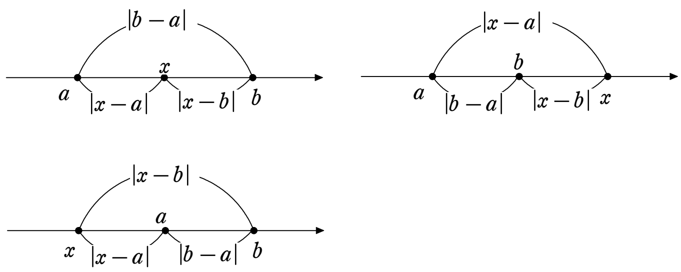
【戦略２】

少しテクニカルな見方をしますが，一般に

$a<b$ のとき，実数 x に対して

$$|x-a|+|x-b|\geqq|b-a|$$

が成り立つ。(等号成立は $a\leqq x\leqq b$ のとき)



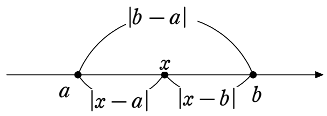
ということを利用します。

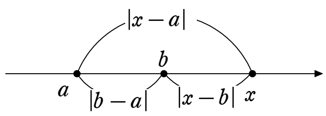
別解

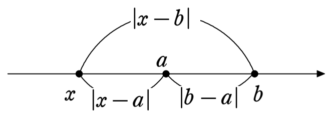
$a<b$ のとき，実数 x に対して

$$|x-a|+|x-b|\geqq|b-a|$$

が成り立つ。（等号成立は $a\leqq x\leqq b$ のとき）







これより

$|x-1|+|x-99|\geqq 99-1(=98)$ （等号成立は $1\leqq x\leqq 99$ のとき）

$|x-2|+|x-98|\geqq 98-2(=96)$ （等号成立は $2\leqq x\leqq 98$ のとき）

$|x-3|+|x-97|\geqq 97-3(=94)$ （等号成立は $3\leqq x\leqq 97$ のとき）

⋮

⋮

$|x-49|+|x-51|\geqq 51-49(=2)$ （等号成立は $49\leqq x\leqq 51$ のとき）

$|x-50|\geqq 0$ （等号成立は $x=50$ のとき）

辺々加えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{99}|x-k|&\geqq 2+4+\cdots+98\\&=\sum_{k=1}^{49}2k\\&=2\cdot\frac{49\cdot 50}{2}\\&=2450\end{aligned}$$

等号成立は

$1\leqq x\leqq 99$ かつ $2\leqq x\leqq 98$ かつ …… かつ $49\leqq x\leqq 51$ かつ $x=50$

すなわち $x=50$ のとき

以上から求める最小値は 2450 … 答

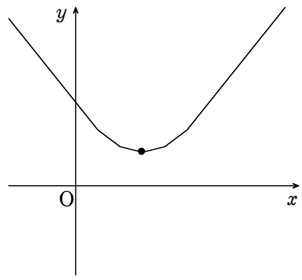
【総括】

割と有名なタイプの問題なので，この手の問題はどこかで見たことがあるかもしれません。

初見だと，記述も含めクシャクシャになる可能性が高いです。

ちなみに，一般の $\sum_{k=1}^{n}|x-k|$ について，

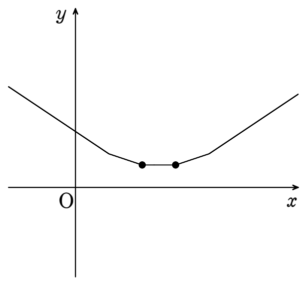
n が奇数のときは，必ず x の係数が残りますから



のように，先が尖ります。

一方，n が偶数のときは，絶対値がそのまま外れるものと，符号チェンジで外れるものの個数がちょうど同じということがあり得るため，x の係数が残らない場合があります。

したがって



のように，底がフラットになります。

このようなグラフ的特徴も経験として頭に入っていると，なお記述しやすいでしょう。

また，別解 は大人がカッコつけた観賞用の解答だと思ってください。