$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 (a,b,c) を全て求めよ。

＜ ’14 一橋大 ＞

【戦略】

実験してみると分かりますが，a，b は結構大きい数でないとマズそうです。

ある程度の大きさをもった素数ですから「奇素数」であることを見抜きたいところです。

すると，$a-b-8$ は (奇数)$-$(奇数)-8 で偶数ということになり，偶数の素数ということになると，$a-b-8=2$ と確定します。

このことから，$a-b=10$ という関係式を得ます。

残る $b-c-8$ については c の偶奇が決め手になりそうです。

c が奇素数のときは $b-c-8$ は (奇数)$-$(奇数)-8 で偶数ということになり，$b-c-8=2$，すなわち $b-c=10$ という関係式を得ます。

$\begin{cases} a-b=10 \\ b-c=10 \end{cases}$ **という関係式から何を見出すかですが，これは**

c，b，a がこの順に公差 10 の等差数列

であることを意味します。

実験してみると

(c,b,a)
$=(3,13,23),(5,15,25),(7,17,27),(11,21,31),(13,23,33)\cdots$

となり，$(c,b,a)=(3,13,23)$ しかなさそうです。

どのようにそれを裏付けるかですが，ダメな組を見てみると，素数になっていないものは 3 の倍数になっているようです。

そこから c を 3 で割った余りで分類して場合分けする方針に進んでいきたいですね。

$c=2$ のときは $b-2-8=q$（q は素数），すなわち $b-q=10$ となり

$\begin{cases} a-b=10 \\ b-q=10 \end{cases}$ **を得て，q，b，a がこの順に公差 10 の等差数列となります。**

3 つの素数が公差 10 の等差数列をなしているとき，その並びは $(3,13,23)$ しかないということは上で議論済みですから，省エネでき，これで全て解決します。

解答

$\begin{cases} a-b-8=p \cdots ① \\ b-c-8=q \cdots ② \end{cases}$ （p，q は素数）とおく。

① より $a-b-8>0$ となり，$a-b>8(>0)$

② より $b-c-8>0$ となり，$b-c>8(>0)$

これより，$a>b$ かつ $b>c$，すなわち $a>b>c\ (\geqq 2)$ を得る。

条件より a，b は素数だから a，b は奇素数 $\cdots(*)$

すると ① において左辺は偶数

ゆえに，p は偶数の素数ということになり，$p=2$

したがって，$a-b-8=2$，すなわち $a-b=10 \cdots ③$ を得る。

(i) c が奇素数のとき

② において左辺は偶数（$\because (*)$）

ゆえに，q は偶数の素数ということになり，$q=2$

したがって，$b-c-8=2$，すなわち $b-c=10 \cdots ④$ を得る。

③，④ より，c，b，a はこの順に公差 10 の等差数列をなす。

(i−1) $c=3$ のとき

$b=13$，$a=23$ で，これらはすべて素数。

(i−2) $c=3k+1$（k は 2 以上の整数）と表せるとき

$$\begin{aligned} a&=c+20 \\ &=3k+21 \\ &=3(k+7) \end{aligned}$$

となり，a は素数とならない。

(i−3) $c=3k+2$（k は自然数）と表せるとき

$$\begin{aligned} b&=c+10 \\ &=3k+12 \\ &=3(k+4) \end{aligned}$$

となり，b は素数とならない。

以上から $(a,b,c)=(23,13,3)$

(ii) $c=2$ のとき

② より $b-2-8=q$，すなわち $b-q=10 \cdots ⑤$

③，⑤ より，q，b，a はこの順に公差 10 の等差数列をなす。

(i) の結果は 3 つの素数が公差 10 の等差数列をなすとき，その数字の組は $(3,13,23)$ に限られるということを意味しており，

$$(q,b,a)=3,13,23$$

これより，$(a,b,c)=(23,13,2)$ は題意を満たす。

以上 (i)，(ii) より，求める素数の組 (a,b,c) は

$$(a,b,c)=(23,13,3),(23,13,2) \cdots 答$$

【部分的な戦略】

(i) の c , b , a はこの順に公差 10 の等差数列をなすということについての処理ですが , b を基準にすると , $b-10$, b , $b+10$ と表せます。

$\mathrm{mod}\,3$ で考えると , $b-10 \equiv b-1$, $b+10 \equiv b+1$ ですから

$b-10$, b , $b+10$ のどれかに必ず 3 の倍数が含まれてしまいます。

3 の倍数でありながら素数であるものは 3 しかないので

$$b-10=3 \quad \text{または} \quad b=3$$

ということになります。($b+10$ は 3 になりようがありません)

$b=3$ だと $b-10=-7$ ということになり , 不適ですから $b=13$ となるしかないわけです。

このとき , $(c\,,\,b\,,\,a)=(3\,,\,13\,,\,23)$ となり確かに題意を満たします。

【部分的 別解 】(i) ③ , ④ より , c , b , a はこの順に公差 10 の等差数列をなす 以降

$c=b-10$, $a=b+10$ と表せる。

$b-10$, b , $b+10$ がすべて素数となるときを考える。

以下 m を整数とする

$b=3m$ のとき ,

$$b-10=3m-10 = 3(m-4)+2 \qquad b+10=3m+10 = 3(m+3)+1$$

$b=3m+1$ のとき

$$b-10=3m-9 = 3(m-3) \qquad b+10=3m+11 = 3(m+3)+2$$

$b=3m+2$ のとき

$$b-10=3m-8 = 3(m-3)+1 \qquad b+10=3m+12 = 3(m+4)$$

これより , $b-10$, b , $b+10$ を 3 で割った余りはすべて異なる。

したがって , $b-10$, b , $b+10$ のどれかに必ず 3 の倍数が含まれる。

3 の倍数である素数は 3 しかないため , $b-10$, b , $b+10$ のどれかに 3 が含まれる。

$b-10 \geqq 2$, すなわち $b \geqq 12$ であることを考えると , b , $b+10$ は 3 になり得ない。

ゆえに , $b-10=3$, すなわち $b=13$ となる。

このとき , $c=3$, $a=23$ となり , a , b , c は全て素数である。

よって $(a\,,\,b\,,\,c)=(23\,,\,13\,,\,3)$

【総括】

総合的に「実験」が欠かせません。マニュアル的な態度で倒せる相手ではないでしょう。

処理だけ見たら定番の処理ですが , そこに至るためには

「目の前の式から何が言えるのか」

ということを見抜く洞察力が不可欠です。