

算術幾何平均

正の実数 r と $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して $a_0 = r \cos \theta$, $b_0 = r$ とおく。

$a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。

- (1) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。
- (2) $\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。
- (3) $\theta \neq 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r \sin \theta}{\theta}$ を示せ。

< '10 北海道大 >