正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して $a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n $(n=1,2,3,\cdots)$を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ ,\quad b_n=\sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3) $\theta\fallingdotseq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。

＜ '10 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **様子を掴むための実験的な設問です。**

$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ **という半角公式は，普段は「次数下げ」に使うことが多いのですが，今回のように $\sqrt{\quad}$ が絡むと，次数を上げるために使うことも多々あります。**

(2) **実験から，** $\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ **であるという予想がつきます。**

証明の方針については，漸化式が絡んでいることから数学的帰納法を選択したいところです。

(3) **経験がないとツラい問題です。**

(2)の議論で現れる $b_{k+1}=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ **という漸化式から攻めます。**

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=b_n\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\\
&=b_{n-1}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\\
&=b_{n-2}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\\
&\qquad\vdots\\
&\qquad\vdots\\
&=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

と番号を下げていきます。

この式の両辺に $\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ **をかけると**

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^n}$

$$b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\boxed{\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}}$$

えい！

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

$$b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\boxed{\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

ファイヤー

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-2}}$

$$b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^2}b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\boxed{\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}$$

アイスストーム

$\vdots$ **バヨエーン**

$\vdots$ **バヨエーン**

$$b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}b_0\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}r\sin\theta$$

というように２倍角の公式によって，どんどんくっついてキレイに消えていきます。（ゲームのぷよぷよみたいですね）

$2^{n+1}b_{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}=$(定数) **という形を得るため，実質的には**

数列 $\left\{2^n b_n\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right\}$ **が定数列**

ということを目指せばよいことになります。

もう少し数式的に踏み込んで言えば

$$2^{n+1}b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}=2^n b_n\sin\frac{\theta}{2^n}$$

が言えればよいということです。

解答

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos\dfrac{\theta}{2^n}>0$ であることに注意する。

$$a_1=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{r(1+\cos\theta)}{2}=r\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}=r\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=r\cos\frac{\theta}{2}$$

よって，$\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$ … $\boxed{\text{答}}$

$$a_2=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{r\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって，$\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$ … $\boxed{\text{答}}$

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ …(*) と予想できるので，これを数学的帰納法で示す。

(i) $n=0$ のとき　$\dfrac{a_0}{b_0}=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ で，(*) は成り立つ。

(ii) $n=k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ のとき

$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成立すると仮定する。

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{a_k+b_k}{2}\\&=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}\quad\left(\because\ \text{帰納法の仮定より，}a_k=b_k\cos\frac{\theta}{2^k}\right)\\&=\frac{b_k\left(1+\cos\frac{\theta}{2^k}\right)}{2}\\&=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=\sqrt{a_{k+1}b_k}\\&=\sqrt{{b_k}^2\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}}\\&=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

これより，$\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり，(*) は $n=k+1$ のときも成立する。

(3) ① より $b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$

両辺 $2^{n+1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ をかけると

$$\begin{aligned}2^{n+1}b_{n+1}\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}&=b_n2^{n+1}\overbrace{\sin\frac{\theta}{2^{n+1}}\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}\\&=2^nb_n\sin\frac{\theta}{2^n}\end{aligned}$$

これより，数列 $\left\{2^nb_n\sin\dfrac{\theta}{2^n}\right\}$ は n によらない定数列で

$$\begin{aligned}2^nb_n\sin\frac{\theta}{2^n}&=2^0b_0\sin\frac{\theta}{2^0}\\&=r\sin\theta\end{aligned}$$

よって，$b_n=r\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

$$=r\sin\theta\cdot\frac{1}{2^n\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\cdot\dfrac{\theta}{2^n}}$$

$$=\frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

一方 (2) から，$a_n=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(b_n\cos\frac{\theta}{2^n}\right)\\&=\frac{r\sin\theta}{\theta}\end{aligned}$$

以上から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ であることが示された。

【総括】

(2) ぐらいまでは確保したいところです。

(3) の **解答** のような記述は「大人」の記述で，試験場ではむしろ【戦略】で述べたような「２倍角の連鎖」によって消していくのが現実的です。