正三角形のうち，第１象限にある部分の面積の最大最小

原点を中心とする半径１の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第１象限にある部分の面積の最大値と最小値を求めよ。

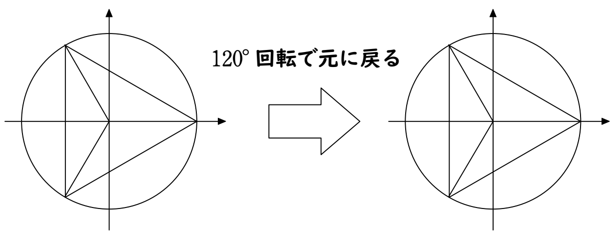
＜ ’01　岡山大 ＞

【戦略】

図形量の最大･最小ですから，変数の設定から考えることになります。

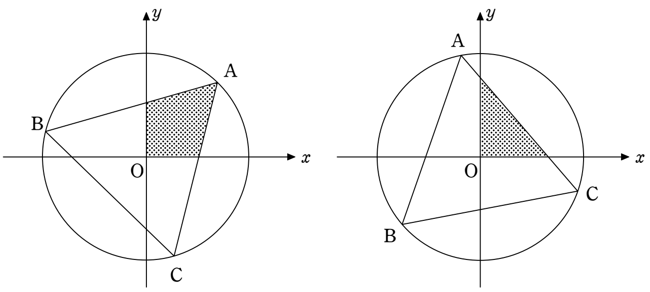
”回転”という言葉もあることですし，素直に角度 θ を導入することにしましょう。

この θ としては $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の範囲で考えれば十分です。



なので，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と設定して $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の範囲で回転させます。

正三角形の第１象限にある部分は



四角形になる場合（点 A が第１象限上）と，三角形になる場合（第２象限，及び軸上）とがあります。

ですから，(i)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$，(ii)　$90^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ という場合分けで考えればよいのですが最大・最小を考えるに当たっては (i) の場合は等号が入っていないので少し考えづらいです。

そこで，(i) のときは”一旦” $0 < \theta < 90^\circ$ で考えて，そのときの題意の面積 S が $\theta = 0^\circ,\ 90^\circ$ でも成立するのかを確かめるという方向性でいきたいと思います。

S の計算については (i)，(ii) どちらのケースにせよ直線 AB，AC の x 切片，y 切片が決め手になりそうなので，これを先回りして計算しておくと手際がよいと思います。

解答

この正三角形を ABC とし，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると，

$\mathrm{B}(\cos(\theta+120^\circ),\ \sin(\theta+120^\circ))$，$\mathrm{C}(\cos(\theta-120^\circ),\ \sin(\theta-120^\circ))$

と設定できる。

以下，簡単のため，$\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$　と略記する。

$$\cos(\theta \pm 120^\circ) = \cos\theta\cos120^\circ \mp \sin\theta\sin120^\circ = -\frac{1}{2}c \mp \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

$$\sin(\theta \pm 120^\circ) = \sin\theta\cos120^\circ \pm \cos\theta\sin120^\circ = -\frac{1}{2}s \pm \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

よって，

$\mathrm{A}(c,\ s)$，$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}s,\ -\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{2}s,\ -\frac{1}{2}s-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$

よって，直線 AB の式は

$$y = \frac{s-\left(-\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)}{c-\left(-\frac{1}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)}(x-c)+s$$ で整理すると，

$$y = \frac{\sqrt{3}s-c}{\sqrt{3}c+s}(x-c)+s \quad \cdots ①$$

直線 AC の式は

$$y = \frac{s-\left(-\frac{1}{2}s-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)}{c-\left(-\frac{1}{2}c+\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)}(x-c)+s$$ で整理すると，

$$y = \frac{\sqrt{3}s+c}{\sqrt{3}c-s}(x-c)+s \quad \cdots ②$$

回転対称性から本問は $0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のときを考えれば十分である。

題意の面積を S とする。

(i)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき

図１のように D，E，H を定める。

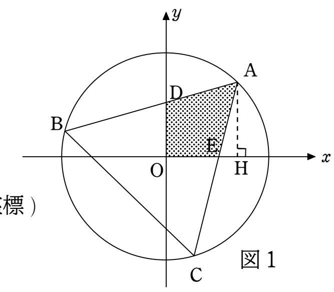


図１

① において $x=0$ とすると

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}c+s}$　を得る。（← D の y 座標）

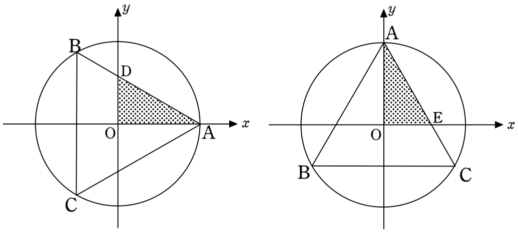
② において $y=0$ とすると

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}s+c}$　を得る。（← E の x 座標）

$$\begin{aligned}
S &= (\text{台形 OHAD}) - \triangle\mathrm{AEH} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}c+s}+s\right)\cdot c - \frac{1}{2}\cdot\left(c-\frac{1}{\sqrt{3}s+c}\right)\cdot s \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}sc+1}{4sc+\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin2\theta+1}{2\sin2\theta+\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(2\sin2\theta+\sqrt{3})}\right) \cdots (*)
\end{aligned}$$

（注：途中計算においては $c^2+s^2=1$ などに注意）

ここで，$\theta=0°$，$90°$ のとき



$S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ であり，(*) において，$\theta=0°$，$90°$ を代入すると

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ を得るため，(*) は $\theta=0°$，$90°$ のときも成立する。

以上から，$0°\leqq\theta\leqq90°$ のとき $S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2(2\sin2\theta+\sqrt{3})}\right)$ となる。

$0°\leqq2\theta\leqq180°$ より，S の最大値，最小値をそれぞれ S_{Max}，S_{min} とすると

$$S_{\mathrm{Max}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(2+\sqrt{3})}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$S_{\mathrm{min}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(ii)　$90°\leqq\theta\leqq120°$ のとき

図 2 のように F を定める。

② において $x=0$ とすると

$y=\dfrac{1}{s-\sqrt{3}c}$ を得る。(← F の y 座標)

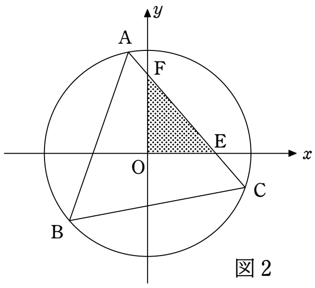


図 2

E の x 座標は (i) で計算したものでよい。

$$S=\triangle\mathrm{OEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}s+c}\cdot\frac{1}{s-\sqrt{3}c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\sqrt{3}\,(c^2-s^2)-2sc}$$

2 倍角の公式より $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{-\sqrt{3}\cos2\theta-\sin2\theta}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sin(2\theta-120°)}$

$60°\leqq2\theta-120°\leqq120°$ なので，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin(2\theta-120°)\leqq1$ であるから

$$S_{\mathrm{Max}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$ (← これは (i) のときの S_{min} の値)

$$S_{\mathrm{min}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{4}$$

(i)，(ii) より，題意の面積の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ …圏　最小値は $\dfrac{1}{4}$ …圏

【戦略２】

解答 における (i)，(ii) の面積計算は x 切片，y 切片に注目してゴリゴリ計算しました。

ここでは幾何的に面積計算をしていきたいと思います。

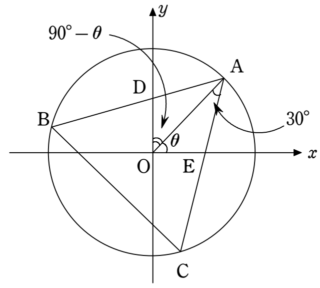
角度がたくさん登場しますから，正弦定理から辺の長さを θ を用いて表していく方針で考えていきます。

どの三角形のどのペアで正弦定理を用いるかについては，辺の情報として分かっている OA ($=1$) を含むように考えていけばよいでしょう。

外角が絡む sin の計算ですから，符号のミスに十分注意しながら落ち着いて処理していきましょう。

部分的 別解 ～ (i)，(ii) における面積計算の部分 ～

(i)　$0°<\theta<90°$ のとき



△OAE で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin(180°-(\theta+30°))}$$

$$\frac{\mathrm{AE}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\theta+30°)}$$

ゆえに，$\mathrm{AE}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}$

$$\triangle\mathrm{OAE}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin30°=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}$$

一方，△OAD で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin(90°-\theta)}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\{180°-(90°-\theta+30°)\}}$$

$$\frac{\mathrm{AD}}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin(120°-\theta)}$$

$$\mathrm{AD}=\frac{\cos\theta}{\sin(120°-\theta)}$$

$$\triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin30°=\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin(120°-\theta)}$$

題意の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+30°)}+\frac{\cos\theta}{\sin(120°-\theta)}\right\}$$
$=$(… 省略 …) (← 加法定理でバラしながらゴリゴリ計算)
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin2\theta+1}{2\sin2\theta+\sqrt{3}}$$

(以下 解答 に準じる)

(ii)　$90^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき

図 I のように φ を定めると $0^\circ \leqq \varphi \leqq 30^\circ$

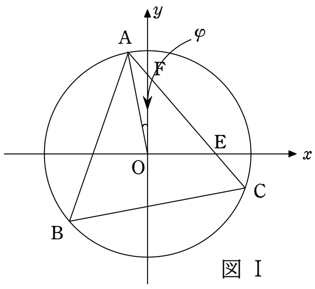


図 I

△OFA で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OF}}{\sin 30^\circ}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\{180^\circ-(30^\circ+\varphi)\}}$$

$$\mathrm{OF}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin(150^\circ-\varphi)}=\frac{1}{2\sin(150^\circ-\varphi)}$$

$90^\circ+\varphi=\theta$ より，$\varphi=\theta-90^\circ$ なので，$\mathrm{OF}=\dfrac{1}{2\sin(240^\circ-\theta)}$

△OEA で正弦定理を用いると

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin 30^\circ}=\frac{\mathrm{OA}}{\sin\{180^\circ-(30^\circ+90^\circ+\varphi)\}}$$

$\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{OE}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin(60^\circ-\varphi)}$ を得る。

$90^\circ+\varphi=\theta$ より，$\varphi=\theta-90^\circ$ なので，$\mathrm{OE}=\dfrac{1}{2\sin(150^\circ-\theta)}$

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OF}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sin(150^\circ-\theta)}\cdot\frac{1}{2\sin(240^\circ-\theta)}\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sin(150^\circ-\theta)}\cdot\frac{1}{\sin(240^\circ-\theta)}\\
&=\frac{1}{8}\frac{1}{-\frac{1}{2}\{\cos(390^\circ-2\theta)-\cos(-90^\circ)\}}\quad(\because\ \text{積和公式})\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}\{\cos(30^\circ-2\theta)\}}\\
&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos(2\theta-30^\circ)}
\end{aligned}$$

変数を１カ所に集めたいときに有効

$90^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ の範囲で $150^\circ \leqq 2\theta-30^\circ \leqq 210^\circ$ なので

$$-1\leqq\cos(2\theta-30^\circ)\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得るため

$$S_{\min}=\frac{-1}{4\cdot(-1)}=\frac{1}{4},\quad S_{\mathrm{Max}}=-\frac{1}{4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

（以下は 解答 に準じる。）

【総括】

シンプルな設定なのですが，完答するためには計算力を含めた粘り強さが求められました。

別解 の (ii) の S の計算においては，解答 に合わせるために無理やり変形するとなると

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OF}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sin(150^\circ-\theta)}\cdot\frac{1}{2\sin(240^\circ-\theta)}\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\sin(150^\circ-\theta)}\cdot\frac{1}{\sin(240^\circ-\theta)}\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos\{90^\circ-(150^\circ-\theta)\}}\cdot\frac{1}{\sin\{180^\circ-(240^\circ-\theta)\}}\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos(-60^\circ+\theta)}\cdot\frac{1}{\sin(-60^\circ+\theta)}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin(2\theta-120^\circ)}
\end{aligned}$$

となり，解答 の式と合流しますが，多分この変形はしないでしょう。